Capítulo 5

# Integração

## 5.1. INTRODUÇÃO

Se uma função $f(x)$ é contínua em um intervalo $[a, b]$ e sua primitiva $F(x)$ é conhecida, então a integral definida desta função neste intervalo é dada por:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \tag{5.1}$$

onde $F'(x) = f(x)$

Entretanto, em alguns casos, o valor desta primitiva $F(x)$ não é conhecido ou de fácil obtenção, o que dificulta ou mesmo impossibilita o cálculo desta integral.

Por outro lado, em situações práticas, nem sempre se tem a função a ser integrada definida por uma fórmula analítica, e sim por meio de tabela de pontos, o que torna inviável a utilização da equação (5.1.).

Para se calcular o valor da integral definida de $f(x)$, nas duas situações citadas acima ou em qualquer outra, torna-se necessária a utilização de métodos numéricos.

A solução numérica de uma integral simples é comumente chamada de quadratura.

Os métodos mais utilizados e que serão vistos neste capítulo podem ser classificados em dois grupos:

1) As fórmulas de Newton-Côtes que empregam valores de $f(x)$, onde os valores de $x$ são igualmente espaçados.

2) A fórmula de quadratura gaussiana que utiliza pontos diferentemente espaçados, onde este espaçamento é determinado por certas propriedades de polinômios ortogonais.

Dentre as fórmulas de Newton-Côtes, serão vistas as seguintes: regra dos trapézios e 1ª e 2ª regras de Simpson.

Para a obtenção das fórmulas de Newton-Côtes, é utilizado o polinômio interpolador de Gregory-Newton:

$$P_n(x) = y_0 + z\,\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\cdot\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{z(z-1)(z-2)\ldots(z-n+1)}{n!}\cdot\Delta^n y_0 + R_n \tag{5.2}$$

onde $z = \dfrac{x - x_0}{h}$.

$R_n$ é o resíduo da interpolação:

$$R_n = \frac{z(z-1)(z-2)\ldots(z-n)}{(n+1)!}\cdot h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \quad a \leqslant \xi \leqslant b \tag{5.3}$$

$P_n(x)$ é o polinômio de $n$-ésimo grau.

Aproximando a função $f(x)$ em (5.1), pelo polinômio de Gregory-Newton, e integrando-o, obter-se-ão as fórmulas de Newton-Côtes.

Esta aproximação se justifica, pois este polinômio é de fácil integração.