Capítulo 8

O Modelo Erlang

Conforme afirmamos no Capítulo 4, o modelo M/M/c não dimensiona filas corretamente, existindo outros modelos que apresentam melhores resultados. Dentre eles, temos o modelo M/Em/c, para o qual:

- Chegadas seguem Poisson;
- Atendimento segue a Distribuição Erlang de grau m.

Neste capítulo estudaremos o Modelo M/Em/c e também faremos algumas comparações de dimensionamento de equipamentos, utilizando diversos modelos de filas.

O dimensionamento de equipamentos geralmente leva em conta os seguintes indicadores:

- Fornecer ao cliente o menor tempo em fila;
- Um sistema de menor custo e máxima capacidade de produção.

Pela primeira opção tentaríamos dimensionar o sistema de modo que TF tenha um valor pequeno e aceitável pelos clientes. Assim, no processo de dimensionamento, procuramos a quantidade ideal de servidores que produza um valor adequado para TF.

Conforme veremos neste capítulo, para uma mesma quantidade de servidores, o modelo M/M/c fornece um valor para TF maior que o modelo M/Em/c.

Podemos deduzir disto que, **para um dado valor TF desejado, o modelo M/Em/c necessita de uma menor quantidade de servidores** que o modelo M/M/c. Isto é o mesmo que afirmar que o modelo M/M/c **superdimensiona** equipamentos relativamente ao modelo M/Em/c.

8.1 - O Modelo M/Em/1

Conforme citamos anteriormente, o processo de chegada geralmente segue o modelo Marcoviano, mas isto não acontece com o processo de atendimento. Um dos modelos teóricos que se aproximam de alguns casos reais é o da Distribuição de Erlang de grau m. Erlang desenvolveu estas funções em seus estudos em 1918.

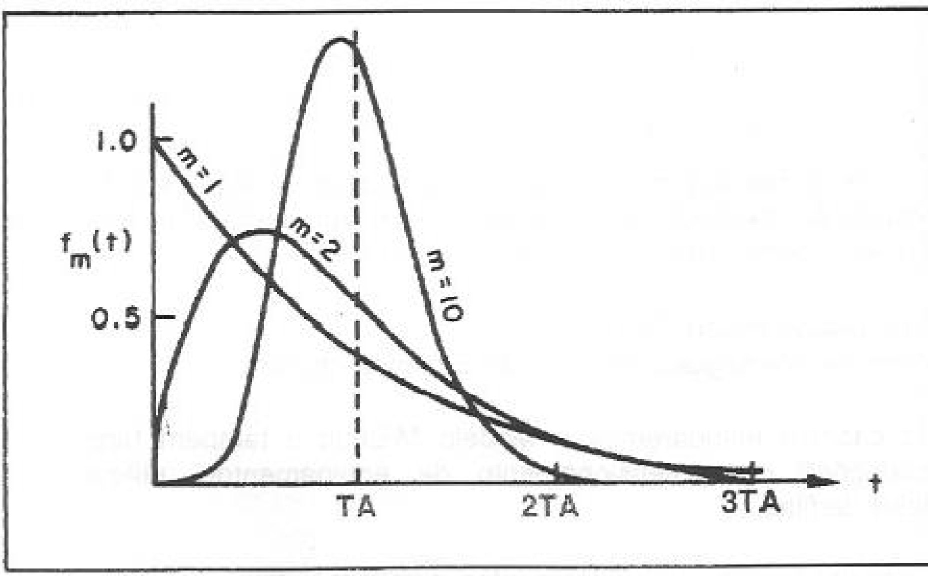


Figura 8.1 – A Função Densidade Erlang (extraído de [1]).

Na Figura 8.1 vemos o formato da Função Densidade Erlang, que, conforme vimos no capítulo 4, está diretamente relacionada com a Distribuição de Freqüência Relativa. Para esta função temos [1]:

- Para m=1 ela tem o mesmo formato que a Função Exponencial Negativa.
- À medida que m cresce, a distribuição tende para a normal.
- Se m tende para infinito, ela tende para uma constante (TA), ou seja, quanto maior m mais próximo de uma constante se torna o tempo de atendimento. Assim, m é um medidor da ordem/desordem do tempo de atendimento.

8.1.1 - Gráficos do Modelo Erlang M/Em/1

Nas Figuras 8.2 e 8.3 mostramos a relação do tamanho da fila (NS) e TS/TA para diversos valores de taxa de utilização (ρ), em que temos:

- Um único atendente;
- O ritmo de chegada segue Poisson (Marcoviano);
- O ritmo de atendimento segue Erlang-m .

Na Figura 8.2 [1] podemos observar:

- Para pequenos valores de ρ, todas as curvas fornecem praticamente o mesmo valor de NS.
- Para valores de ρ maiores de 0,3 a diferença entre as curvas é bastante significativa, sendo os valores correspondentes à Distribuição Exponencial maiores que os de Erlang-m. Como conseqüência, os outros medidores de fila (NF, TS, etc) obedecerão a mesma tendência: os valores da Exponencial Negativa serão maiores que os de Erlang-m.

A Figura 8.3 [1] apresenta os valores de TS/TA versus ρ e através dela podemos calcular TS. Esta figura nos leva às mesmas conclusões do texto anterior referentes à Figura 8.2.

8.1.2 - Exemplos

Exemplo 1:
Para um sistema no qual não se conhece a função de atendimento mas se supõe que seja Erlang, temos: λ=2 clientes/minuto e μ=3 clientes/minuto. Calcule os valores de NS para diversas opções conforme a Figura 8.2 (observação: trata-se do exemplo do pedágio, discutido no Capítulo 4).

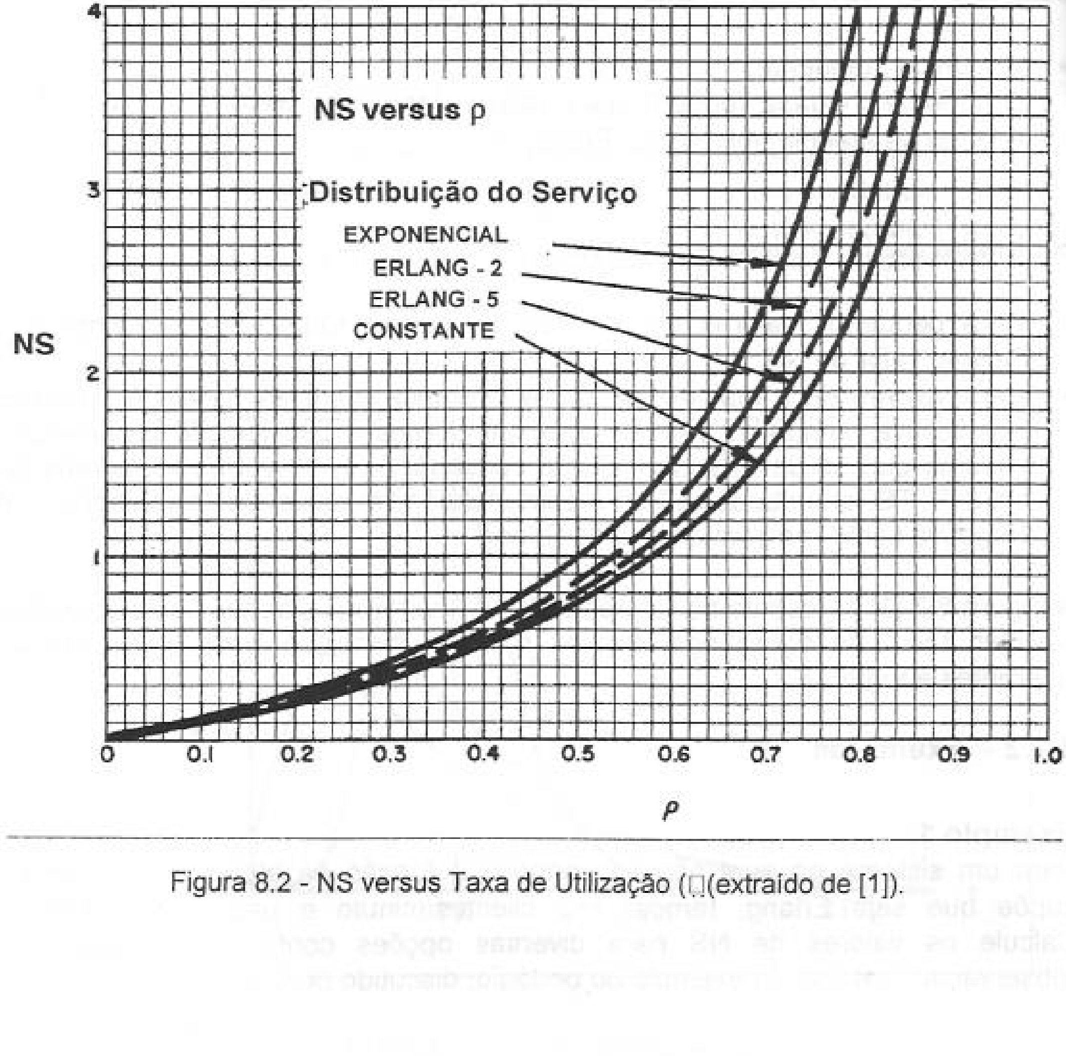


Figura 8.2 - NS versus Taxa de Utilização (□(extraído de [1]).

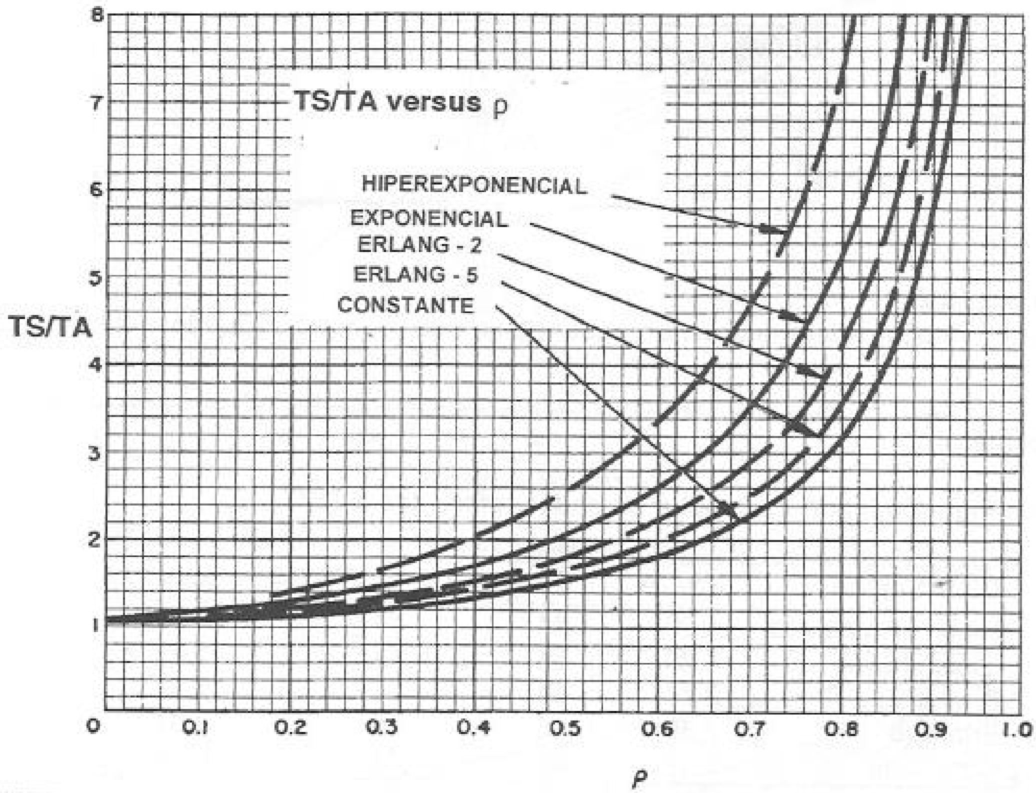


Figura 8.3 - TS/TA versus Taxa de Utilização (ρ) (extraído de [1]).

Solução:

Temos que $\rho = \lambda/\mu = 0{,}668$. Pela Figura 8.2 podemos obter os dados abaixo:

Distribuição	NS
Exponencial	2,10
Erlang-2	1,80
Erlang-5	1,55
Constante	1,40

Exemplo 2:
Para o mesmo sistema anterior, sabendo-se que TA = 20 segundos, calcule TS, TF e NF.

Solução:

Pela Figura 8.3 podemos obter os dados referentes a TS/TA.

Distribuição	**TS/TA**	**TS (seg.)**	**TF=TS-TA**	**NF=λTF**
Hiper-Exponencial	4,20	84	64	2,10
Exponencial	3,20	64	44	1,47
Erlang-2	2,70	54	34	1,13
Erlang-5	2,30	46	26	0,87
Constante	2,10	42	22	0,73

8.2 - O Modelo M/Em/c

O modelo que apresentamos aqui refere-se a um único atendente. Pelas Figuras 8.2 e 8.3 verificamos que os valores para NS, NF, TS e TF para a distribuição exponencial são maiores que os valores para as distribuições de Erlang. Se o modelo em análise fosse o **M/Em/c** (diversos atendentes) a conclusão seria a mesma, conforme podemos observar pelas Figuras 8.4 e 8.5, comparando-as com a correspondentes figuras do Capítulo 7 (Figuras 7.2 e 7.3).

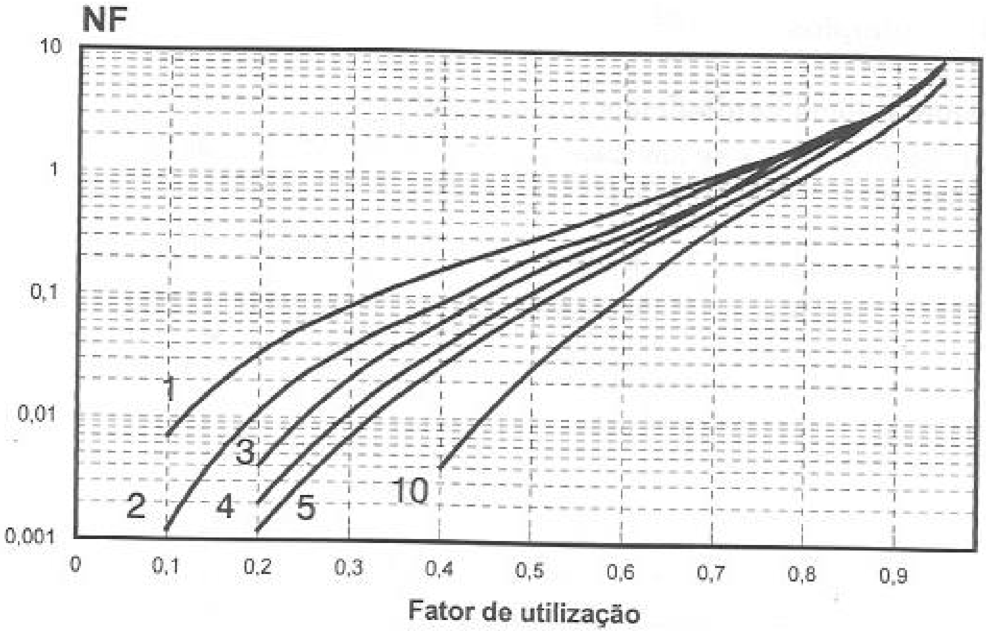


Figura 8.4 – NF versus Taxa de Utilização ($\rho = \lambda / c\mu$) para M/E5/c

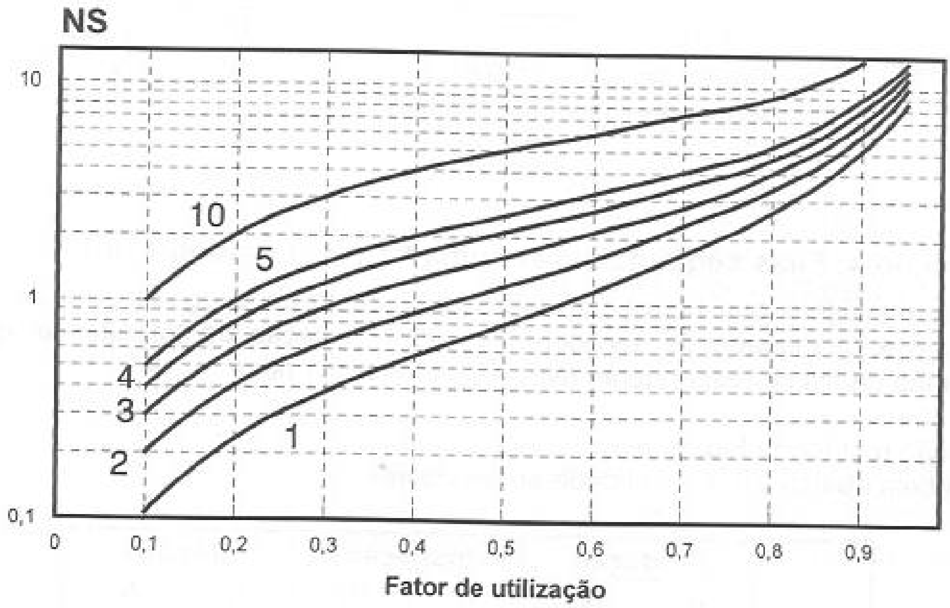
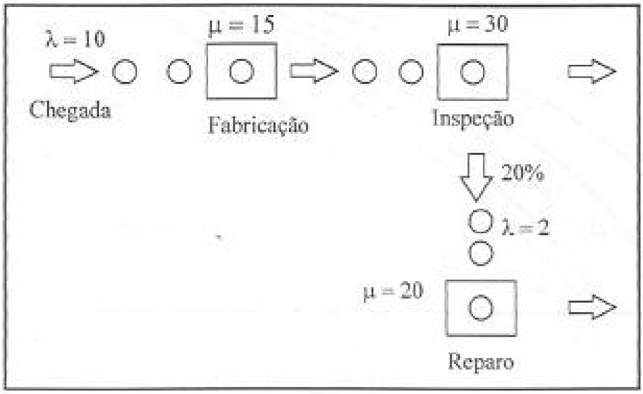


Figura 8.5 – NS versus Taxa de Utilização ($\rho = \lambda / c\mu$) para M/E5/c

8.2.1 - Exemplos

Exemplo 3: Filas seqüenciais em uma fábrica

Em um sistema de filas seqüenciais, conforme figura abaixo, calcule as filas que se formam em cada servidor (suponha o modelo M/E5/1).



Solução (conforme Figura 8.4):

Fila	ρ	NF
Produção	0,66	0,85
Inspeção	0,33	0,11
Reparo	0.1	0,007

Exemplo 4: Filas seqüenciais em uma fábrica (continuação)

Considere agora que houve um aumento no ritmo de chegada para ρ = 25. Calcule a quantidade de servidores em cada estação de trabalho tal que o tamanho da fila correspondente (NF) seja inferior a 1 peça.

Solução (conforme Figura 8.4):
Na tabela abaixo c é a quantidade de servidores.

c	Produção		Inspeção		Reparo	
	ρ	NF	ρ	NF	ρ	NF
1	-	-	0,83	3	0,25	**0,06**
2	0,83	3	0,41	**0,1**		
3	0.55	**0,25**				

Conclusão: A quantidade de servidores que atende à solicitação é:
Produção = 3, Inspeção = 2, Reparo = 1.

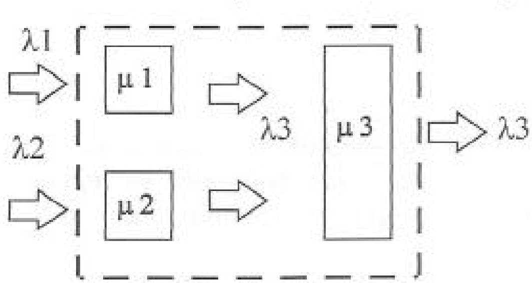
Observação: Compare a solução deste exemplo com os correspondentes exemplos dos Capítulos 6 e 7.

8.3 - Exercícios

1. Um sistema de filas de 1 atendente apresenta $\lambda=6$ e $\mu=10$ (unidade: hora). Supondo que o ritmo de chegadas segue Poisson e o de atendimento segue Erlang (ou seja, um modelo M/Em/1), calcule NS, TS, NF e TF para diversos valores de m (use as Figuras 8.2 e 8.3). Compare com os correspondentes valores para as distribuições Exponencial e Constante.

2. Navios chegam a um porto para ser carregados de minério a um ritmo de 3 chegadas por semana. O porto possui 3 cais de atracação e o tempo médio de cada navio é de 0,5 semana. Sabendo-se que um navio parado, esperando para ser carregado, implica uma multa de $70.000 por semana para a administração do porto (esta multa é conhecida por *demurrage* no ambiente portuário), pede-se o custo semanal devido às multas.

3. Em um sistema de filas, conforme figura ao lado, em que peças fluem pela linha de produção, temos (distribuições do atendimento: Erlang-5):
$\lambda 1 = 10$, $\lambda 2 = 5$, $\mu 1 = 15$, $\mu 2 = 30$ e $\mu 3 = 20$



Pede-se:

- Calcular NF, TF, NS e TS para cada servidor
- Calcular NS e TS para o sistema como um todo

4. No mesmo sistema, supondo-se que houve um crescimento nos ritmos de chegada tal que $\lambda 1= 25$ e $\lambda 2=12$, qual deve ser a quantidade de servidores em cada estação de trabalho de forma que NF seja menor que 1?

5. Redimensione a estação de trabalho número 3 de modo que seu custo horário seja mínimo. Os dados são: custo horário do atendente: $5 e custo horário da peça parada: R$8

8.4 - Referências

1. "Analysis of Some Queueing Models in Real-Time Systems", manual IBM número GF20-0007-1