Capítulo 6

O Modelo M/M/1

somente 1 atendente

O objetivo deste capítulo é discutir o modelo M/M/1, isto é, aquele em que tanto as chegadas quanto o atendimento são marcovianos (o que é o mesmo que dizer que seguem a Distribuição de Poisson ou a Exponencial Negativa) e em que temos um único atendente. O estudo será feito para os casos de população infinita e finita.

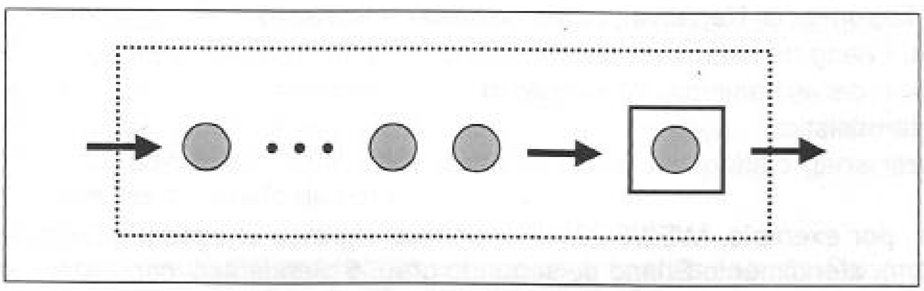


Figura 6.1: Representação do Modelo de Fila M/M/1.

Na Figura 6.1 vemos a representação mais usual para o modelo M/M/1. Nela o retângulo tracejado representa o sistema que está sendo analisado, ao qual chegam clientes que recebem algum atendimento e, então, desocupam o sistema.

Para um sistema como o da Figura 6.1 são válidas as seguintes definições, conforme visto no Capítulo 2:

- λ = Ritmo Médio de Chegada
- IC = Intervalo Médio entre Chegadas (por definição: IC = $1/\lambda$)
- TA = Tempo Médio de Atendimento ou de Serviço
- μ = Ritmo médio de Atendimento de cada atendente (por definição: TA = $1/\mu$)

6.1 - População Infinita

São as seguintes as fórmulas que tratam as principais variáveis randômicas:

Nome	Descrição	Fórmula
NF	Número Médio de Clientes na Fila	$NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
NS	Número Médio de Clientes no Sistema	$NS = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$
TF	Tempo Médio que o Cliente fica na Fila	$TF = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$
TS	Tempo Médio que o Cliente fica no Sistema	$TS = \frac{1}{\mu - \lambda}$
P_n	Probabilidade de existirem n Clientes no Sistema	$Pn = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$

6.1.1 - A Taxa de Utilização

Chamamos de TAXA DE UTILIZAÇÃO a relação entre o ritmo médio de chegada e o ritmo médio de atendimento:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Conforme vimos anteriormente, sistemas estáveis exigem λ menor que μ ou $\rho < 1$. Quando ρ tende para 1 a fila tende a aumentar infinitamente, conforme mostramos a seguir:

$$NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

A expressão anterior mostra claramente que, se $\lambda = \mu$, temos $\rho = 1$ e o tamanho da fila é infinito.

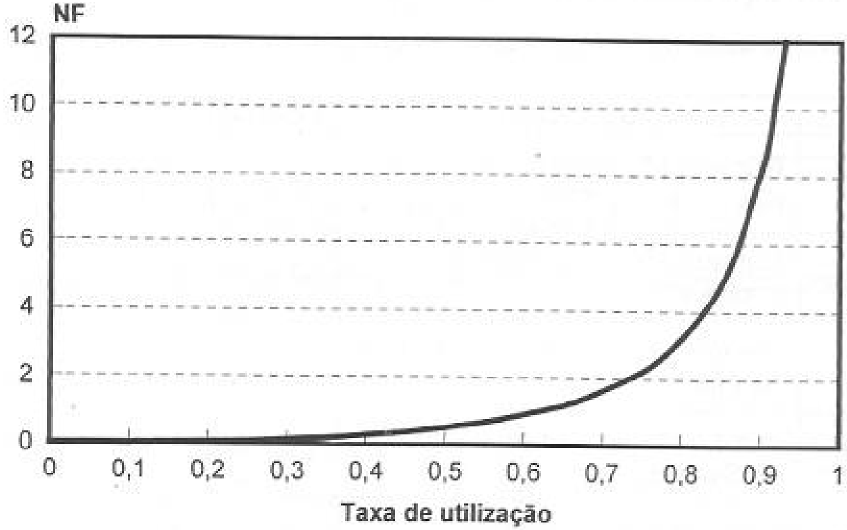


Figura 6.2: NF x Taxa de Utilização (ρ) para o Modelo M/M/1.

A Figura 6.2 mostra o relacionamento entre NF e ρ. Nela vemos claramente o que ocorre com NF quando ρ tende para 1. Em situações práticas, quando isto ocorre (por exemplo, pelo crescimento do ritmo de chegada causada por um aumento da demanda) deve-se ficar alerta, pois, se NF cresce exponencialmente, isto significa que o mesmo ocorrerá com o Tempo na Fila (TF) e com o Tempo no Sistema (TS). Este fato tem inúmeras aplicações práticas dentre as quais podemos citar:

- Uma conclusão da observação da Figura 6.2 é que, se temos um sistema saturado (ρ próximo de 1), basta **dobrarmos nossa capacidade de atendimento** (e, então, ρ será menor que 0,5) para que a fila seja menor que 1.

- Computadores tipo *main-frame* são instalados nas empresas para trabalhar a uma taxa de utilização abaixo de 60%, quando atendem adequadamente as solicitações em "tempo real". Com o passar do tempo e aumento da demanda, é comum a troca de equipamentos quando eles chegam a uma taxa de utilização de 90%, pois, a partir deste ponto, o "tempo de resposta" geralmente já não é adequado.

6.1.1 - EXEMPLOS

Exemplo 1: A cabine telefônica

Suponhamos que as chegadas a uma cabine telefônica obedecem a lei de Poisson, com ritmo de 6 chegadas por hora. A duração média do telefonema é de 3 minutos e suponhamos que siga a distribuição exponencial. Pede-se:

a) Qual a probabilidade de uma pessoa chegar à cabine e não ter que esperar?
b) Qual o número médio de pessoas na fila?
c) Qual o número médio de pessoas no sistema?
d) Qual o número médio de clientes usando o telefone?
e) Qual o tempo na fila?
f) Para qual ritmo de chegada teríamos a situação em que o tempo médio de espera na fila seria de 3 minutos?
g) Qual é a fração do dia durante a qual o telefone está em uso?

Solução: Pelos dados temos:

λ = 6 chegadas/hora. Portanto IC = 10 minutos

TA = 3 minutos. Portanto, μ = 20 atendimentos/hora

a) Trata-se de calcular P_0 (probabilidade de não existir ninguém no sistema):

$P_0 = 1 - \lambda / \mu = 1 - 6 / 20 = 0{,}7$

Ou seja, existe uma probabilidade de 70% de que uma pessoa, ao chegar, não encontre ninguém no sistema e possa usar imediatamente o telefone. O complemento deste valor, 30%, significa a probabilidade de uma pessoa ter de esperar. Assim, o telefone fica ocupado 30% do tempo e fica 70% do tempo ocioso.

b) $NF = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$ = (6x6) / (20 (20 - 6)) = 0,1289

c) NS = $\lambda / (\mu - \lambda)$ = 0,42~~8~~9

d) NA = NS - NF = 0,428 - 0,128 = 0,300

e) TF = $\lambda / \mu(\mu - \lambda)$ = 6 / 20 (20 - 6) = 0,021 hora = 1,28 minutos

f) TF = $\lambda / \mu(\mu - \lambda)$

Para TF = 3 minutos ou TF = 0,05 hora e mantendo o mesmo μ = 20 clientes/hora, temos que:

$$\lambda = \frac{TF \cdot \mu^2}{1 + \mu \cdot TF} = 10 \text{ chegadas / hora}$$

g) A fração do dia durante a qual o telefone está em uso é exatamente igual a $(1 - P_0)$, isto é, a probabilidade de que existam pessoas no sistema. Conforme calculado no item "a", este valor é 30%.

Exemplo 2: O depósito de ferramentas

Uma fábrica possui um depósito de ferramentas onde os operários vão receber as ferramentas especiais para a realização de uma determinada tarefa. Verificou-se que o ritmo de chegada (λ = 1 chegada/minuto) e o ritmo de atendimento (μ =1,2 atendimentos por minuto) seguem o modelo marcoviano M/M/1. A fábrica paga $9,00 por hora ao atendente e $18,00 ao operário. Pede-se:

a) O custo horário do sistema
b) A fração do dia em que o atendente não trabalha.

Solução:

a) O custo horário do sistema é igual à soma do custo horário do atendente com o custo horário dos operários que, por ficarem no sistema (na fila ou sendo atendido pelo servidor), não estão produzindo em seus postos de trabalho. Para calcularmos este último, devemos conhecer o número médio de clientes no sistema (NS).

$$NS = \lambda / (\mu - \lambda) = 1 / (1{,}2 - 1) = 5$$

Portanto: Custo horário = (Custo Atendente) + (Custo operários)
Custo horário = ($9,00) + (5 x $18,00) = $99,00

b) A fração do dia durante a qual o atendente não trabalha é igual ao valor da probabilidade de não existir nenhum operário no sistema:

$$P_0 = 1 - \lambda/\mu = 0{,}16$$

No próximo capítulo verificaremos o custo total do sistema com 2 ou mais atendentes.

Exemplo 3: Contratação de um reparador

Uma empresa deseja contratar um reparador para efetuar manutenção em suas máquinas, que estragam a um ritmo de 3 falhas por hora. Para tal possui 2 opções: um reparador lento, que é capaz de consertar a um ritmo de 4 falhas por hora ou um reparador rápido, que é capaz de consertar a um ritmo médio de 6 falhas por hora. O salário/hora do reparador lento é de $3,00 e o do reparador rápido é de $5,00. Qual contratação deve ser efetuada para que o custo total (reparador mais máquinas paradas) seja mínimo? Sabe-se que uma máquina parada implica um custo horário de $5,00.

Solução:

Para calcular o custo das máquinas paradas devemos calcular o número médio de máquinas paradas (NS).

a) Reparador lento

NS = λ / (μ-λ) = 3 / (4-3) = 3 máquinas

Custo das máquinas = 3 x \$5,00 = \$15,00

Custo do reparador = \$3,00

Custo total = \$18,00

b) Reparador rápido

NS = 3 / (6-3) = 1 máquina

Custo das máquinas = 1 x \$5,00 = \$5,00

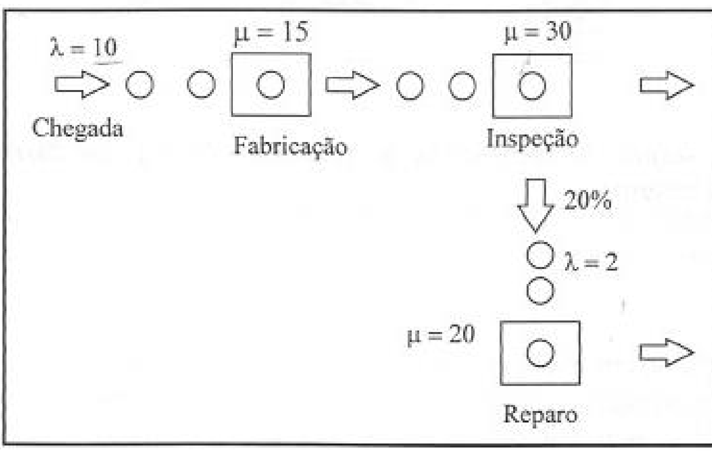
Custo do reparador = \$5,00

Custo total = \$ 10,00

Comparando, vemos que o reparador rápido, apesar de ter um custo maior, implica um custo total menor.

Exemplo 4: Filas seqüenciais em uma fábrica

Em um sistema de filas seqüenciais, conforme figura a seguir, calcule as filas que se formam em cada servidor.



Solução:

Fila	λ	μ	NF
Produção	10	15	1,54
Inspeção	10	30	0,17
Reparo	2	20	0,01

O leitor deve agora resolver os exercícios 1 a 7.

6.2 - População Finita: o Modelo M/M/1/K

Um caso particular e bastante encontrado na vida prática é aquele em que a população de clientes é finita. Considere, por exemplo, uma mineração com 1 escavadeira e alguns caminhões e seja $\lambda = 8$ e $\mu = 10$. Na Figura 6.3 mostramos o tamanho médio da fila (calculado pelas fórmulas a seguir) em função do tamanho da população de caminhões (se a população fosse infinita, teríamos NF = 3,2).

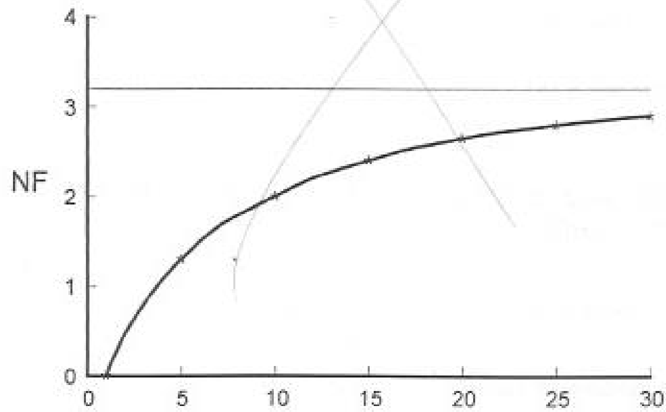


Figura 6.3 - K (Tamanho da população)

FÓRMULAS

Na tabela a seguir, K representa a quantidade finita de clientes que estão percorrendo o sistema.

Nome	Descrição	Fórmula
NF	Número Médio de Clientes na Fila	$\mathrm{NF} = \mathrm{K} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} + (1 - P_0) + \frac{\lambda}{\mu}$
NS	Número Médio de Clientes no Sistema	$\mathrm{NS} = \mathrm{K} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} + (1 - P_0) + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu}$
TF	Tempo Médio que o Cliente fica na Fila	$\mathrm{TF} = \frac{\mathrm{K}}{\lambda} - \frac{(\lambda + \mu) \times (1 - P_0)}{\lambda^2}$
TS	Tempo Médio que o Cliente fica no Sistema	$\mathrm{TS} = \frac{\mathrm{K}}{\lambda} - \frac{(\lambda + \mu) \times (1 - P_0)}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu}$
P_n	Probabilidade de existirem n Clientes no Sistema	$\mathrm{P_n} = \dfrac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{K-n}}{(K - \mathrm{n}) \times \sum_{j=0}^{K} \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{j}}{j!}}$

6.3 - Exercícios

1. Clientes chegam a uma barbearia em um ritmo de 3 por hora e o serviço demora, em média, 16 minutos. Qual o tempo médio de espera na recepção? E no sistema?

2. Pessoas chegam a uma bilheteria de um teatro a um ritmo de 25 por hora. O tempo médio de atendimento da bilheteira é de 2 minutos. Calcule o tamanho da fila, o tempo médio de espera e a fração de tempo em que a bilheteira não trabalha.

3. Em um sistema no qual $\lambda = 4$ clientes/hora e $\mu = 6$ clientes/hora, qual a probabilidade de existir no sistema:

a) zero clientes
b) 1 cliente
c) 3 ou 4 clientes
d) 5 ou mais clientes

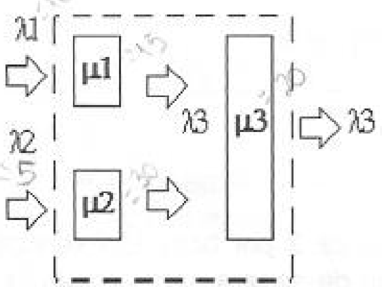
4. No mesmo sistema anterior, admitindo-se que o custo do cliente parado seja de \$10 por hora, pede-se o custo horário de clientes no sistema.

5. Uma empresa deseja comprar um equipamento para efetuar manutenção em suas máquinas, que estragam a um ritmo de 12 falhas por semana. Possui duas opções: o equipamento marca A custa \$20.000,00 e é capaz de efetuar 15 consertos por semana; o equipamento B custa \$80.000,00 e é capaz de efetuar 50 consertos por semana. Sabe-se que o custo semanal de uma máquina parada é de \$500,00 e que o tempo útil de vida de ambos os equipamentos é de 5 anos.
Pergunta-se: Qual equipamento deve ser adquirido de modo que o custo total anual (52 semanas) seja mínimo?
Observações:

- Para calcular o custo anual do valor do equipamento, efetue a operação: *(Custo Anual) = (Custo do Equipamento) x (fator de recuperação do capital).*
- Considere uma taxa de juros de 15% ao ano. Assim, temos que o fator de recuperação de capital é 0,2984.

6. Em um sistema de filas seqüenciais (veja figura), no qual as peças fluem pela linha de produção, temos:

$$\lambda 1 = 10,\ \lambda 2 = 5,\ \mu 1 = 15,\ \mu 2 = 30 \text{ e } \mu 3 = 20.$$



Calcule:
a) NF, TF, NS e TS para cada servidor
b) NS e TS para o sistema como um todo

7. Em um setor de uma fábrica, o produto que está sendo fabricado chega para receber componentes adicionais, trabalho este realizado por um operário. Após instalados os componentes, o produto é inspecionado por um profissional qualificado. Os produtos que passam na inspeção vão para outro setor da fábrica e os que são rejeitados (20%) vão para uma área de reparo existente no próprio setor. Atualmente os dados são os seguintes (distribuição exponencial):

- A cada 40 minutos chega um novo produto ao setor;
- O instalador gasta 25 minutos para instalar os componentes;
- O inspetor gasta 5 minutos para inspecionar o trabalho realizado;
- O reparador gasta 10 minutos para efetuar os reparos necessários;
- Os tempos de deslocamentos do produto entre as estações de trabalho são iguais a 1 minuto.

Pede-se:

a) NF, NS, TF e TS para cada servidor
b) NS e TS para o sistema como um todo