Capítulo 3

Filas: Conceitos Básicos (II)

O objetivo deste capítulo é continuar com as considerações conceituais do capítulo anterior, agora com um enfoque matemático, no qual apresentaremos as chamadas "variáveis randômicas fundamentais".

3.1 - Variáveis Randômicas Fundamentais

Consideremos o sistema de filas da Figura 3.1, em situação estável, na qual clientes chegam e entram em fila, existindo c servidores para atendê-los. Seja λ o ritmo médio de chegada e μ o ritmo médio de atendimento de cada atendente. Portanto:

λ = Ritmo médio de chegada
μ = Ritmo médio de atendimento
c = Capacidade de Atendimento ou Quantidade de Atendentes

Dentre as variáveis randômicas que estudaremos neste livro, algumas serão freqüentemente citadas e as chamaremos de "**variáveis randômicas fundamentais**". É o que mostramos na Figura 3.1 e explicamos a seguir.

- Variáveis Referentes ao Sistema
  TS = Tempo Médio de Permanência no Sistema
  NS = Número Médio de Clientes no Sistema

- Variáveis Referentes ao Processo de Chegada

λ = Ritmo Médio de Chegada
IC = Intervalo Médio entre Chegadas
Por definição: IC = $1/\lambda$

- Variáveis Referentes à Fila

  TF = Tempo Médio de Permanência na Fila
  NF = Número Médio de Clientes na Fila

- Variáveis Referentes ao Processo de Atendimento

  TA = Tempo Médio de Atendimento ou de Serviço
  c = Capacidade de Atendimento ou Quantidade de atendentes
  NA = Número Médio de Clientes que estão sendo atendidos
  μ = Ritmo Médio de Atendimento de cada atendente
  Por definição: TA = $1/\mu$

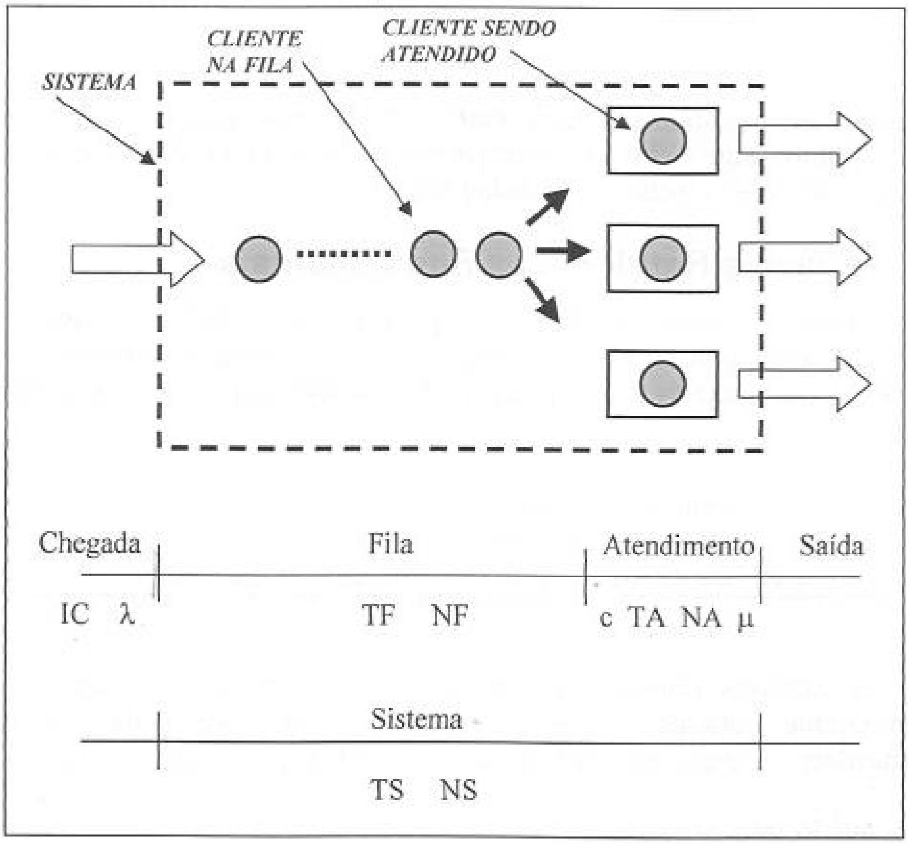


Figura 3.1 - Localização das variáveis.

3.1.1 - Relações Básicas

Existem duas relações óbvias entre as variáveis randômicas mostradas na Figura 3.1:

$$NS = NF + NA$$
$$TS = TF + TA$$

Pode-se demonstrar também que:

$$NA = \lambda / \mu = TA / IC.$$

Portanto:

$$NS = NF + NA = NF + (\lambda / \mu) = NF + (TA / IC).$$

3.1.2 - Taxa de Utilização dos Atendentes

Para o caso de "uma fila/um atendente", chamamos de taxa de utilização do atendente a expressão

$$\rho = \lambda / \mu$$

na qual λ = ritmo médio de chegada e μ = ritmo médio de atendimento.

No caso de uma fila/vários atendentes, a expressão se torna:

$$\rho = \lambda / c\,\mu$$

em que c é o número de atendentes.

Assim, ρ representa a fração média do tempo em que cada servidor está ocupado. Por exemplo, com um atendente, se chegam 4 clientes por hora e se o atendente tem capacidade para atender 10 clientes por hora dizemos que a taxa de utilização e 0,40 e podemos também afirmar que o atendente fica 40% do tempo ocupado e 60% do tempo livre (esta afirmativa é intuitiva mas pode ser matematicamente demonstrada).

Visto que estudaremos apenas sistemas estáveis (os atendentes sempre serão capazes de atender ao fluxo de chegada, ou seja $\lambda < \mu$) teremos sempre que $\rho < 1$. Quando $\rho = 1$ o atendente trabalhará 100% do tempo (e estranhos fatos ocorrerão ...).

3.1.3 - Intensidade de Tráfego ou Número Mínimo de Atendentes

Chamamos de intensidade de tráfego a expressão

$$i = | \lambda / \mu | = | TA / IC |$$

em que i é o próximo valor inteiro que se obtém (ou seja, o valor absoluto) e é medido em "erlangs" em homenagem a A. K. Erlang. Na prática, i representa o número mínimo de atendentes necessário para atender um dado fluxo de tráfego. Por exemplo, se λ = 10 clientes/hora e TA = 3 minutos (ou μ = 20 clientes /hora) temos que $\lambda / \mu = 0,5$, ou i =1, e concluímos dizendo que 1 atendente é suficiente para o caso. Se o fluxo de chegada aumentar para λ = 50 clientes/hora, temos que $\lambda / \mu = 2,5$, ou i = 3, isto é, necessitamos de no mínimo 3 atendentes. Na indústria telefônica esta variável é bastante utilizada ao se referir a tráfego em troncos telefônicos.

3.1.4 - Fórmulas de Little

J.D.C. Little demonstrou que, para um sistema estável de filas, temos:

$$NF = \lambda \,.\, TF$$
$$NS = \lambda \,.\, TS$$

Estas fórmulas são muito importantes pois, assim como as equações 3.1 e 3.2, fazem referências a quatro das mais importantes variáveis randômicas de um sistema de filas: NS, NF, TS e TF. Por exemplo, se além de λ e μ, conhecemos TS, podemos obter as outras variáveis assim:

$NS = \lambda.TS$
Se $TA = 1/\mu$
Portanto: $TF = TS - TA = TS - 1/\mu$
Finalmente: $NF = \lambda.TF$

É importante salientar que todas as fórmulas acima independem da quantidade de servidores e do modelo de fila, pois trata-se de fórmulas fundamentais básicas.

> O leitor pode observar que existe uma semelhança entre as fórmulas de Little e a fórmula sobre velocidade da física clássica:
>
> Little: $\lambda = NF / TF$
> Física: $v = e / t$ (v = velocidade e = espaço t= tempo)

3.1.5 - Resumo das Fórmulas

Nome	Fórmula
Intervalo Entre Chegadas	$IC = 1 / \lambda$
Tempo do Atendimento	$TA = 1 / \mu$
Taxa de Utilização dos Atendentes	$\rho = \lambda / c\,\mu$
Intensidade de Tráfego	$i = \lvert \lambda / \mu \rvert = \lvert TA / IC \rvert$
Relações entre Fila, Sistema e Atendimento	$NS = NF + NA$ $NA = \lambda / \mu$ $NS = NF + \lambda / \mu = NF + TA / IC$ $TS = TF + TA$ $NA = \rho = \lambda / M\,\mu$
Fórmulas de Little	$NF = \lambda.TF$ $NS = \lambda.TS$

3.2 - Exemplos

Exemplo 1:

Em uma fábrica observou-se o funcionamento de um dado setor, em que $\lambda = 20$ clientes por hora, $\mu = 25$ clientes por hora e TS = 0,3 hora. Pede-se o tamanho médio da fila.

Solução:

$TA = 1/\mu = 0{,}04$
$TF = TS - TA = 0{,}26$
$NF = \lambda.TF = 5{,}2$ clientes

Exemplo 2:

Para o mesmo sistema acima, calcular NS e NA.

Solução:

$NS = \lambda.TS = 20 \times 0{,}3 = 6$ clientes
$NA = NS - NF = 6 - 5{,}2 = 0{,}8$ cliente

Exemplo 3:

Em uma mineração cada caminhão efetua um ciclo onde é carregado de minério por uma das carregadeiras, desloca-se para o britador para o descarregamento e retorna às carregadeiras. Verificou-se que o tempo médio (TS) dos caminhões junto ao britador é de 12 minutos e que, em média, existem 6 caminhões (NS) no setor. Qual a taxa de chegada de caminhões? (Veja Figura 3.2).

Solução:

Consideremos o espaço do britador como o sistema em estudo:
Pela lei de Little: NS = λ.TS ou λ = NS/TS
Logo: λ = 6/12 = 0,5 chegadas por minuto

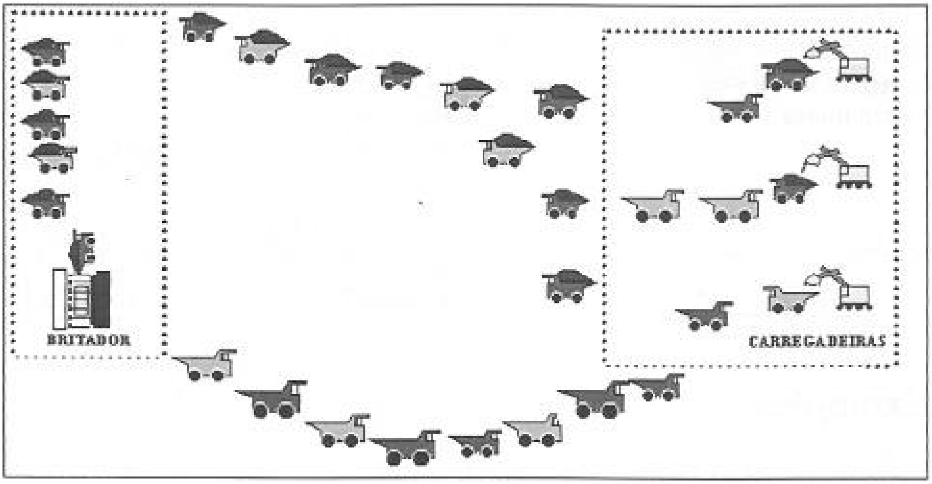


Figura 3.2 - Caminhões em uma mineração

Exemplo 4:

No mesmo sistema acima, existindo um total de 30 caminhões em serviço, qual a duração de um ciclo?

Solução:

Chamamos de **ciclo** ao tempo gasto para que um caminhão, partindo de um ponto de referência qualquer, percorra todo o sistema e volte ao mesmo ponto. Conseqüentemente, este também é o tempo necessário para que todos os caminhões passem pelo mesmo ponto. Se considerarmos o britador como sendo o ponto de referência, e conhecendo a taxa de chegada a este ponto, podemos deduzir o tempo gasto para que todos os caminhões passem por este ponto:

Duração do ciclo = (Quantidade de caminhões) / λ
Duração do ciclo = 30 / λ = 30/0,5 = 60 minutos.

Exemplo 5:

No mesmo sistema acima, qual o tempo médio para o processo completo de carregamento (ou TFS: Tempo Fora do Sistema)?

Solução:

Consideremos como o sistema em estudo o espaço formado em torno do britador, no qual temos o caminhão sendo descarregado e os outros em fila. Por exclusão, um caminhão está "fora do sistema" quando não ocupa o espaço citado. Um ciclo corresponde à soma do tempo dentro do sistema (TS=12) mais o tempo de fora do sistema (TFS). Logo:

TFS + TS = ciclo = 60 minutos
TFS = 60 – 12 = 48 minutos

3.2.1 - Resumo das Fórmulas: continuação

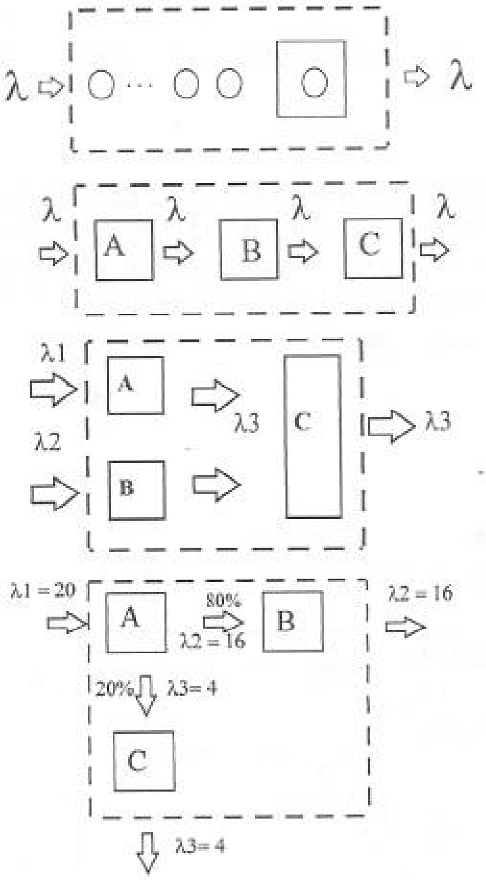
Podemos agora acrescentar à nossa tabela a fórmula do ciclo:

Nome	Fórmula
Intervalo Entre Chegadas	$IC = 1 / \lambda$
Tempo do Atendimento	$TA = 1 / \mu$
Taxa de Utilização dos Atendentes	$\rho = \lambda / c\,\mu$
Intensidade de Tráfego	$i = \mid \lambda / \mu \mid = \mid TA / IC \mid$
Relações entre Fila, Sistema e Atendimento	$NS = NF + NA$ $NA = \lambda / \mu$ $NS = NF + \lambda / \mu = NF + TA / IC$ $TS = TF + TA$ $NA = \rho = \lambda / M\,\mu$
Fórmulas de Little	$NF = \lambda.TF$ $NS = \lambda.TS$
Ciclo	Ciclo = TS + TFS Ciclo = (Tam. da População) / λ

O leitor deve agora resolver os exercícios propostos 1 a 6.

3.3 - Postulados Básicos

Apresentamos na Figura 3.3 alguns postulados básicos que se aplicam a quaisquer sistemas de filas nos quais existe estabilidade ou seja, λ é menor que μ em todas as estações de trabalho (o ritmo médio de chegada é menor que o ritmo médio de atendimento).



A. Em qualquer sistema estável, o fluxo que entra é igual ao fluxo que sai.

B. Em qualquer sistema estável, o fluxo de entrada se mantém nas diversas seções do sistema, desde que não haja junção ou desdobramento.

C. Em qualquer sistema estável, a junção de fluxos equivale às suas somas aritméticas, ou seja:

$$\lambda 3 = \lambda 1 + \lambda 2$$

D. Em qualquer sistema estável, o desdobramento percentual de um fluxo é igual ao desdobramento aritmético do mesmo fluxo. Assim, se após a estação A temos que 80% do fluxo se deslocam para B, então o ritmo de chegada em B é de 0,8 x 20 = 16 clientes por minuto.

Figura 3.3 – Postulados Básicos.

3.4 - Exercícios

1. Em uma pizzaria que faz entregas em casa, chegam, em média, 4 entregadores por minuto para pegar o produto a ser entregue. Sabe-se, ainda, que o número médio de entregadores dentro da pizzaria é de 6 (NS). Qual o tempo médio no sistema?

2. No mesmo sistema anterior, existem 40 entregadores. Qual o tempo médio da entrega (TFS)?

3. Em um sistema de computação tem-se:

- Tempo médio de pensar e fornecer dados (TFS) = 15 segundos

- Quantidade de terminais ativos = 40
- Taxa de chegada de transações = 2 por segundo

Pede-se o tempo de resposta do computador (TS).

4. Em uma mineração temos 12 caminhões efetuando um ciclo no qual consomem 4 minutos entre fila e carregamento pela escavadeira (TS) e, a seguir, gastam 8 minutos para levar a carga até o britador e voltar (TFS). Calcular λ e NS.

5. Em um sistema de computação temos 21 terminais. O tempo médio de resposta do computador (TS) é de 2 segundos e existem, em média, 6 transações (NS) dentro do sistema. Pede-se:

a) Qual a taxa de chegada de transações?

b) Qual a duração de um ciclo?

c) Qual o "tempo médio de pensar e fornecer dados " (TFS)?

6. No desenho seguinte, representativo do fluxo de peças em um setor de uma fábrica, calcule o fluxo de chegada em cada equipamento.