5.2.6.2. Calcular o valor da integral e o erro cometido:

$$I = \int_{4}^{4,5} \frac{1}{x^2}\, dx$$

5.2.6.3. Calcular o valor da integral e o erro cometido:

$$I = \int_{3}^{6} 3x + 2\ dx$$

5.2.6.4. Calcular o valor da integral para $n = 4$:

$$I = \int_{0}^{1} \frac{\cos x}{1 + x}\, dx$$

Considerando que o valor exato desta integral é $I = 0{,}6010$, calcular a diferença entre este valor e o valor obtido neste exercício e, ainda, entre o valor exato e o valor obtido no exercício 5.2.6.1.

5.2.6.5. Dada a função $y = f(x)$ através da tabela abaixo, calcular o valor de

$$I = \int_{0}^{3} f(x)\ dx$$

**Tabela 5.2**

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 0,0 | 5,021 |
| 1 | 0,5 | 6,146 |
| 2 | 1,0 | 6,630 |
| 3 | 1,5 | 6,945 |
| 4 | 2,0 | 7,178 |
| 5 | 2,5 | 7,364 |
| 6 | 3,0 | 7,519 |

## 5.3. PRIMEIRA REGRA DE SIMPSON

### 5.3.1. Obtenção da Fórmula

A 1ª regra de Simpson é obtida aproximando-se a função $f(x)$ em (5.1) por um polinômio interpolador de 2º grau, $P_2(x)$.

$$f(x) \doteq P_2(x) = y_0 + z\ \Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\ \Delta^2 y_0$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \doteq \int_a^b P_2(x)\,dx = \int_a^b \left[ y_0 + z\,\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 \right] dx$$

Como $z = \dfrac{x - x_0}{h} \Rightarrow dx = h\,dz$

Para se aproximar a função $f(x)$ por um polinômio de 2º grau, serão necessários 3 pontos: $x_0$, $x_1$ e $x_2$, que deverão estar igualmente espaçados.

Sejam $x_0 = a$ e $x_2 = b$

Fazendo-se uma mudança de variáveis, tem-se

para: $x = a \Rightarrow z = \dfrac{a - a}{h} = 0$

$x = b \Rightarrow z = \dfrac{b - a}{h} = 2$

Logo,

$$I = \int_0^2 \left[ y_0 + z\,\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 \right] h\,dz$$

Integrando, obtém-se:

$$I = h \left[ z y_0 + \frac{z^2}{2}\Delta y_0 + \left( \frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{4} \right) \Delta^2 y_0 \right]_0^2$$

$$I = h \left[ 2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 y_0 \right]$$

Sabe-se que:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

Logo,

$$I = h\left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right]$$

$$I = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right] \qquad (5.12)$$

que é a chamada 1ª regra de Simpson ou regra do 1/3.

### 5.3.2. Interpretação Geométrica

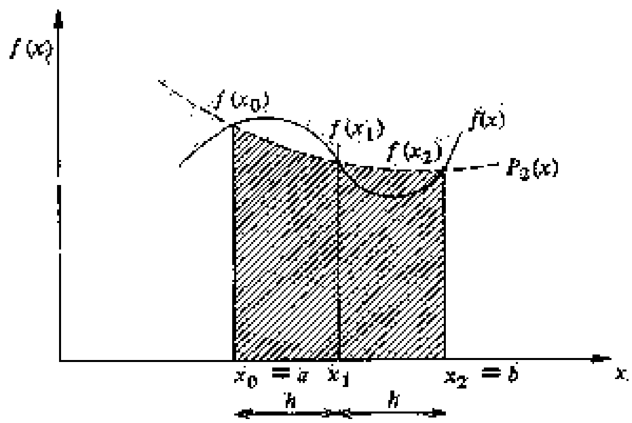


Figura 5.3. Primeira regra de Simpson.

### 5.3.3. Erro de Truncamento

Para a determinação do erro cometido na integração, basta que se integre o erro de truncamento da aproximação polinomial. Este erro (de truncamento) é cotado pelo resíduo (fórmula 5.3)).

$$E = \int_a^b R_2(x)\,dx$$

$$E = \int_0^2 \frac{z(z-1)(z-2)}{3!} f'''(\xi)\, h^4\, dz$$

$$E = \frac{h^4}{3!} f''''(\&) \int_0^2 (z^3 - 3z^2 + 2z)\, dz$$

$$E = \frac{h^4}{3!} f''''(\&) \left[ \frac{z^4}{4} - z^3 - z^2 \right]_0^2$$

$$E = \frac{h^4}{3!} f''''(\&) \cdot 0 = 0$$

Este valor nulo para o erro de integração quer dizer que o erro não depende de $R_2$ (resíduo do 2º grau). Então, tem-se que integrar o resíduo menor que ele, o $R_3$.

$$E = \int_0^2 R_3(x)\, dx$$

$$E = \int_0^2 \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{4!} f''''(\&)\, h^5\, dz$$

$$E = -\frac{h^5}{90} f''''(\&) \qquad a \leqslant \& \leqslant b \tag{5.13}$$

que é a fórmula de erro da 1ª regra de Simpson.

Por esta fórmula pode-se notar que a 1ª regra de Simpson fornece valores exatos não só para a integração de polinômios do 2º grau, mas, também, para polinômios de 3º grau (derivada de 4ª ordem nula).

## 5.3.4. Fórmula Composta

Como foi feito com a regra dos trapézios, deve-se subdividir o intervalo de integração $[a, b]$ em $n$ subintervalos iguais de amplitude $h$ e a cada par de subintervalos aplicar a 1ª regra de Simpson.

**Observação importante:** como a regra de Simpson é aplicada em pares de subintervalos, o número $n$ de subintervalos deverá ser sempre par.

$n = \dfrac{b-a}{h}$ e os pontos serão: $x_i$ ; $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$I = \frac{h}{3}\underbrace{[y_0 + 4y_1 + y_2]}_{\substack{\text{aplicação no 1º par}\\ \text{de subintervalos}}} + \frac{h}{3}\underbrace{[y_2 + 4y_3 + y_4]}_{\substack{\text{aplicação no 2º par}\\ \text{de subintervalos}}} + \ldots +$$

$$+ \frac{h}{3}\underbrace{[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]}_{\substack{\text{aplicação no último par}\\ \text{de subintervalos}}}$$

$$I = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right] \quad (5.14)$$

## 5.3.5. Erro de Truncamento

O erro total cometido será a soma dos erros cometidos a cada aplicação da 1ª regra de Simpson.

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_{n/2} = \sum_{i=1}^{n/2} E_i \quad (5.15)$$

onde:

$E_i$ é o erro na integração numérica no par de subintervalos cujos extremos são:

$[x_{2i-2}, x_{2i-1}]$ e $[x_{2i-1}, x_{2i}]$

Levando (5.13) em (5.15) vem:

$$E = \sum_{i=1}^{n/2} \frac{-h^5}{90} f^{(IV)}(\xi_i) \quad (5.16)$$

$$x_{2i-2} \leqslant \xi_i \leqslant x_{2i}$$

Pela continuidade de $f^{(IV)}(x)$, existe $\xi \in [a, b]$, tal que:

$$\frac{n}{2} f^{(IV)}(\xi) = \sum_{i=1}^{n/2} f^{(IV)}(\xi_i) \qquad (5.17)$$

Levando-se (5.17) em (5.16), tem-se:

$$E = \frac{-h^5}{180} \; n f^{(IV)}(\xi)$$

Como

$$h = \frac{b-a}{n}$$

então

$$E = \frac{-(b-a)^5}{180 n^4} \; f^{(IV)}(\xi) \qquad a \leqslant \xi \leqslant b \qquad (5.18)$$

Pode-se observar que, nesta fórmula, o erro cai com a quarta potência do número de subintervalos.

**Exemplo 5.4**

Calcular o valor de $\pi$, dado pela expressão:

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$

aplicando a 1ª regra de Simpson, com $\epsilon \leqslant 10^{-4}$.

Cálculo do número de subintervalos:

$$\epsilon \leqslant 10^{-5} \rightarrow \frac{(b-a)^5}{180 n^4} \, f^{(IV)}(\xi) \leqslant 10^{-4}$$

Como

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

então

$$f^{(IV)}(x) = \frac{24}{(1 + x^2)^3} - \frac{288x^2}{(1 + x^2)^4} + \frac{384x^4}{(1 + x^2)^5}$$

Já que

$$0 \leqslant \xi \leqslant 1$$

então

$$|f^{(IV)}(\xi)|_{máx} = 24$$

Logo,

$$\frac{(1 - 0)^5}{180n^4} \cdot 24 \leqslant 10^{-4}$$

$$n^4 \geqslant \frac{24}{180} \cdot 10^4 = 1333{,}33$$

$$n \geqslant 6{,}042$$

Como se trata da 1ª regra de Simpson, o valor de $n$ deverá ser um número inteiro par. Calculando o erro para os dois valores pares próximos, tem-se:

$$\text{para } n = 6 \Rightarrow E = \frac{(0 - 1)^4}{180 \cdot 6^4} \cdot 24 = 1{,}03 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{para } n = 8 \Rightarrow E = \frac{-(0 - 1)^5}{180 \cdot 8^4} \cdot 24 = 3{,}26 \cdot 10^{-5}$$

Logo, $n = 8$, pois o erro é da ordem de $10^{-6}$;

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1}{10} = 0{,}125$$

Tabela 5.3

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $c_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,000 | 1,000000 | 1 |
| 1 | 0,125 | 0,984615 | 4 |
| 2 | 0,250 | 0,941176 | 2 |
| 3 | 0,375 | 0,876712 | 4 |
| 4 | 0,500 | 0,800000 | 2 |
| 5 | 0,625 | 0,719101 | 4 |
| 6 | 0,750 | 0,640000 | 2 |
| 7 | 0,875 | 0,566372 | 4 |
| 8 | 1,000 | 0,500000 | 1 |

coluna dos coeficientes

$$\pi = 4 \cdot 0{,}785398$$

$$\pi = 3{,}141592$$