5.2. REGRA DOS TRAPÉZIOS

5.2.1. Obtenção da Fórmula

Para a determinação da regra dos trapézios, é utilizado o polinômio de Gregory-Newton do 1º grau, ou seja, uma reta.

Fazendo $n = 1$ em (5.2) e levando à equação (5.1) tem-se:

$$I = \int_a^b f(x)\ dx \doteq \int_a^b P_1(x)\ dx = \int_a^b \left[y_0 + z\ \Delta y_0 \right] dx$$

Como $z = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow dx = h\,dz$

Considerando $a = x_0$ e $b = x_1$ os intervalos de integração, tem-se para:

$$x = a \Rightarrow z = \frac{x_0 - x_0}{h} = 0$$

$$x = b \Rightarrow z = \frac{x_1 - x_0}{h} = 1$$

Logo,

$$I = \int_a^b \left[y_0 + z\ \Delta y_0 \right] h \cdot dz = h \left[z y_0 + \frac{z^2}{2}\ \Delta y_0 \right]_0^1 =$$

$$= h \left[y_0 + 0{,}5\ \Delta y_0 \right] = h \left[y_0 + 0{,}5\,(y_1 - y_0) \right]$$

$$I = \frac{h}{2}\,(y_0 + y_1) \qquad (5.4)$$

que é a fórmula dos trapézios ou regra dos trapézios.

5.2.2. Interpretação Geométrica

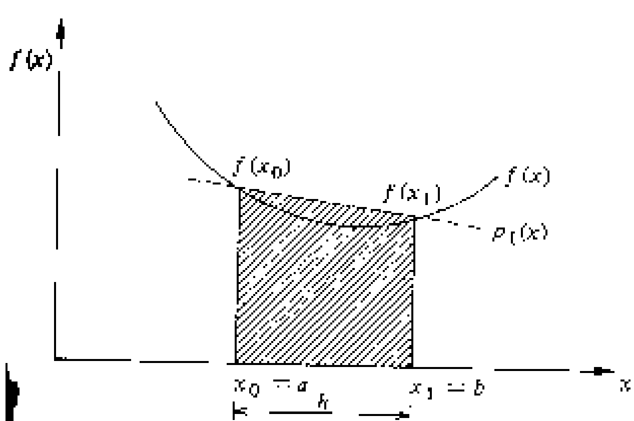

Figura 5.1. Regra dos trapézios.

Pelos dois pontos do extremo do intervalo, fez-se passar uma reta e a integral de $f(x)$ foi aproximada pela área sob esta reta. Da geometria, sabe-se que a área deste trapézio formado é:

$$A = \frac{h}{2}\Big[f(x_0) + f(x_1)\Big]$$

que é a própria fórmula dos trapézios.

5.2.3. Erro de Truncamento

A diferença entre a integral exata de $f(x)$ (área sob a curva $f(x)$) e a integral aproximada (trapézio) é o erro de integração. Tal erro é devido ao erro de truncamento cometido na aproximação da função integranda pelo polinômio de Gregory-Newton. Para a determinação desta área (do erro), basta que se integre o resíduo do polinômio interpolador (fórmula (5.3)).

$$E = \int_a^b R_1 \; dx = \int_0^1 \frac{z(z-1)h^2}{2!} f''(\xi)\; h \; dz$$

$$= h^3 f''(\xi) \cdot \frac{1}{2!} \cdot \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right]_0^1$$

$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \;, \quad a \leqslant \xi \leqslant b \tag{5.5}$$

É interessante notar que nesta fórmula de erro, se $f'' > 0$, então a fórmula dos trapézios dá um valor de integral por excesso; mas, se $f'' < 0$, resulta um valor de integral por falta.

Exemplo 5.1

Calcular, pela regra dos trapézios e, depois, analiticamente, o valor de:

$$I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{dx}{x}$$

Comparar os resultados.

a) Pela regra dos trapézios:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

Como $y = 1/x$, então:

$$y_0 = 1/x_0 = 1/3$$

$$y_1 = 1/x_1 = 1/3{,}6$$

$$h = x_1 - x_0 = 3{,}6 - 3{,}0 = 0{,}6$$

Logo,

$$I = \frac{0{,}6}{2}(1/3 + 1/3{,}6) = 0{,}18333$$

Cálculo do erro:

$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) = \frac{-h^3}{12} \cdot \frac{2}{\xi^3}$$

Como

$$3 < \xi < 3{,}6$$

então

$$| f''(\xi) |_{\text{máx}} = \frac{2}{\xi^3} = \frac{2}{3^3} = \frac{2}{27}$$

$$E = -\frac{(0{,}6)^3}{12} \cdot \frac{2}{27} = 1{,}333 \cdot 10^{-3}$$

Então:

$$I = 0{,}18333 - 1{,}333 \cdot 10^{-3} = 0{,}18200$$

b) Pelo cálculo integral:

$$\int_{3{,}0}^{3{,}6} 1/x \; dx = \ln(3{,}6) - \ln(3{,}00) = 0{,}18232$$

5.2.4. Fórmula Composta

Uma forma que se tem de melhorar o resultado obtido utilizando-se a regra dos trapézios é subdividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de amplitude h e a cada subintervalo aplicar-se a regra dos trapézios (fórmula (5.4)).

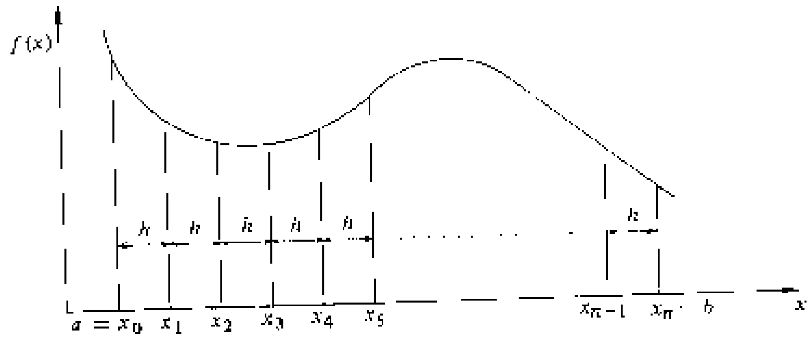

Figura 5.2. Aplicações sucessivas da regra dos trapézios.

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n) \tag{5.6}$$

5.2.5. Erro de Truncamento

O erro total cometido é a soma dos erros cometidos na aplicação da fórmula dos trapézios a cada subintervalo.

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + \ldots + E_{n-1} \tag{5.7}$$

onde E_i é o erro cometido na aplicação da regra dos trapézios no intervalo cujos extremos são x_i e x_{i+1}, ou seja,

$$E_i = \frac{-h^3}{12} f''(\xi_i) \tag{5.8}$$

$$x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$$

Levando (5.8) em (5.7), tem-se:

$$E = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \tag{5.9}$$

Pela continuidade de $f''(x)$, existe $a \leqslant \xi \leqslant b$, tal que:

$$nf''(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \tag{5.10}$$

Levando (5.10) em (5.9), tem-se:

$$E = \frac{-h^3}{12}\, nf''(\xi)$$

Como

$$h = \frac{b-a}{n}$$

então:

$$E = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \quad a \leqslant \xi \leqslant b \tag{5.11}$$

Pode-se notar em (5.11) que, ao se subdividir o intervalo $[a, b]$ em um grande número de subintervalos, o erro cometido tende a se tornar pequeno, pois o erro é inversamente proporcional ao quadrado de n.

Exemplo 5.2

Calcular a integral do exemplo 5.1 utilizando a regra dos trapézios composta e subdividindo o intervalo de integração em 6 subintervalos.

$$I = \int_{3.0}^{3.6} \frac{1}{x}\, dx$$

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{3{,}6 - 3{,}0}{6} = 0{,}1$$

Tabela 5.1

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	3,0	0,333333
1	3,1	0,322581
2	3,2	0,312500
3	3,3	0,303030
4	3,4	0,294118
5	3,5	0,285714
6	3,6	0,277778

$$I = \frac{h}{2}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6 \right]$$

$$I = 0{,}182350$$

Cálculo do erro:

$$E = -\frac{(b - a)^3}{12\, n^2}\, f''(\&)$$

Como $3{,}0 \leqslant \& \leqslant 3{,}6$

$$|f''(\&)|_{\text{máx}} = \frac{2}{27}$$

Logo,

$$E = -\frac{(3{,}6 - 3{,}0)^3}{12 \cdot 6^2} \cdot \frac{2}{27} = -3{,}704 \cdot 10^{-5}$$

Então:

$$I = 0{,}182350 \quad 3.704 \cdot 10^{-5} = 0{,}182313$$

Pode-se observar que a precisão deste resultado é superior ao obtido utilizando-se a regra dos trapézios simples, como no exemplo 5.1.

Exemplo 5.3

Calcular o valor da integral

$$I = \int_0^1 (2x + 3)\ dx$$

aplicando a regra dos trapézios composta e subdividindo o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos de tal modo que o erro seja mínimo.

$$E = -\frac{(b - a)^3}{12\,n^2} \cdot f''(\xi)$$

$$f(x) = 2x + 3$$

$$f'(x) = 2$$

$$f''(x) = 0$$

$$E = -\frac{(b - a)^3}{12\,n^2} \cdot 0 = 0$$

O erro será nulo para qualquer valor de n. Fazendo, então, $n = 1$, tem-se:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 5) = 4$$

Como a regra dos trapézios aproxima por uma reta a função integranda e sendo $f(x) = 2x + 3$ uma reta, o valor da integral obtido é exato.

5.2.6. Exercícios de Fixação

Resolver os exercícios abaixo utilizando a regra dos trapézios.

5.2.6.1. Calcular o valor da integral:

$$I = \int_0^1 \frac{\cos x}{1 + x}\ dx$$

5.2.6.2. Calcular o valor da integral e o erro cometido:

$$I = \int_{4}^{4,5} \frac{1}{x^2}\, dx$$

5.2.6.3. Calcular o valor da integral e o erro cometido:

$$I = \int_{3}^{6} 3x + 2\ dx$$

5.2.6.4. Calcular o valor da integral para $n = 4$:

$$I = \int_{0}^{1} \frac{\cos x}{1 + x}\, dx$$

Considerando que o valor exato desta integral é $I = 0{,}6010$, calcular a diferença entre este valor e o valor obtido neste exercício e, ainda, entre o valor exato e o valor obtido no exercício 5.2.6.1.

5.2.6.5. Dada a função $y = f(x)$ através da tabela abaixo, calcular o valor de

$$I = \int_{0}^{3} f(x)\ dx$$

Tabela 5.2

i	x_i	y_i
0	0,0	5,021
1	0,5	6,146
2	1,0	6,630
3	1,5	6,945
4	2,0	7,178
5	2,5	7,364
6	3,0	7,519

5.3. PRIMEIRA REGRA DE SIMPSON

5.3.1. Obtenção da Fórmula

A 1ª regra de Simpson é obtida aproximando-se a função $f(x)$ em (5.1) por um polinômio interpolador de 2º grau, $P_2(x)$.

$$f(x) \doteq P_2(x) = y_0 + z\ \Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\ \Delta^2 y_0$$