2.2.1. Método de Gauss

Com $(n-1)$ passos o sistema linear $A\mathbf{x} = b$ é transformado num sistema triangular equivalente:

$U\mathbf{x} = c$

o qual se resolve facilmente por substituição.

Exemplo 2.8

Resolver

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \quad\;\; x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

pelo método de Gauss.

1ª etapa

Escreve-se a matriz aumentada do sistema acima, isto é,

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] = [A \mid b]$$

Fazendo $B_0 = B$ e chamando de $L_1^{(0)}$, $L_2^{(0)}$ e $L_3^{(0)}$ as linhas 1, 2 e 3, respectivamente, de B_0, escolhe-se $a_{11}^{(0)}$ como pivô e calculam-se os multiplicadores:

$$m_{21}^{(0)} = -\frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$m_{31}^{(0)} = -\frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{2}{2} = -1$$

m_{21}

$L2 = L2 + L1(-2)$

$L3 = L3 + L1(-1)$

m_{31}

Fazem-se, agora, as seguintes transformações elementares sobre as linhas de B_0:

$$L_1^{(0)} \to L_1^{(1)}$$
$$m_{21}^{(0)} L_1^{(0)} + L_2^{(0)} \to L_2^{(1)}$$
$$m_{31}^{(0)} L_1^{(0)} + L_3^{(0)} \to L_3^{(1)}$$

$L_1^{(1)}$, $L_2^{(1)}$ e $L_3^{(1)}$ são linhas da matriz transformada, B_1.

Finaliza, assim, a 1ª etapa, que consiste em eliminar todos os valores abaixo do pivô $a_{11}^{(0)} = 2$.

Efetuando-se as transformações acima indicadas tem-se:

$$B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{array}\right]$$

2ª etapa

Escolhe-se $a_{22}^{(1)} = -2$ como pivô e calcula-se o multiplicador

$$m_{32}^{(1)} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{-6}{-2} = -3$$

São feitas agora as seguintes transformações elementares sobre as linhas B_1:

$$L_1^{(1)} \rightarrow L_1^{(2)}$$
$$L_2^{(1)} \rightarrow L_2^{(2)}$$
$$m_{32}^{(1)}\ L_2^{(1)} + L_3^{(1)} \rightarrow L_3^{(2)}$$

$L_1^{(2)}$, $L_2^{(2)}$ e $L_3^{(2)}$ são as linhas da matriz transformada, B_2, que já está na forma triangular, isto é:

$$B_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right]$$

A matriz B_2 é a matriz aumentada do sistema triangular superior

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ \quad\ \ - 2x_2 - x_3 = -7 \\ \qquad\qquad\ \ 5x_3 = 15 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema dado. Resolvendo o sistema triangular por substituições retroativas tem-se $\overline{\mathbf{x}} = [1\ 2\ 3]^T$ que é, também, solução para o sistema dado.

O dispositivo prático dado a seguir torna mais compacta a triangulação da matriz aumentada do sistema do exemplo 2.8. Nas linhas (1), (2) e (3) colocam-se os coeficientes das incógnitas e os termos independentes do sistema em suas respectivas colunas, calculando-se, na coluna MULTIPLICADOR, os multiplicadores da linha (1) que serão usados na eliminação dos primeiros elementos das linhas (2) e (3). Nas linhas (4) e (5) colocam-se as transformadas das linhas (2) e (3), indicando-se as respectivas transformações na coluna TRANSFORMAÇÕES; calcula-se, também, o multiplicador da linha (4) a ser usado na eliminação do primeiro elemento não nulo da linha (5). Na linha (6) coloca-se a transformada da linha (5), indicando a transformação na coluna TRANSFORMAÇÕES:

Linha	Multiplicador	Coeficientes das Incógnitas			Termos Independentes	Transformações
(1)		2	3	−1	5	
(2)	$-\frac{4}{2} = -2$	4	4	−3	3	
(3)	$-\frac{2}{2} = -1$	2	−3	1	−1	
(4)		0	−2	−1	−7	−2 (1) + (2)
(5)	$\frac{-6}{-2} = -3$	0	−6	2	−6	−1 (1) + (3)
(6)		0	0	5	15	−3 (4) + (5)

O sistema triangular obtido após as transformações elementares tem como equações as linhas (1), (4) e (6), isto é:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ \quad\;\; -2x_2 - x_3 = -7 \\ \qquad\qquad\; 5x_3 = 15 \end{cases}$$

Resolvendo-o por substituições retroativas obtém-se a solução $\overline{\mathbf{x}} = [1\ 2\ 3]^T$, que é também solução do sistema dado, uma vez que ambos são equivalentes.

O exemplo 2.9, a seguir, mostra os efeitos de arredondamento na fase de eliminação e na fase de substituições retroativas.

Exemplo 2.9

Resolver pelo método de Gauss retendo, durante os cálculos, duas casas decimais.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 8{,}7x_1 & + & 3{,}0x_2 & + & 9{,}3x_3 & + & 11{,}0x_4 & = & 16{,}4 \\ 24{,}5x_1 & - & 8{,}8x_2 & + & 11{,}5x_3 & - & 45{,}1x_4 & = & -49{,}7 \\ 52{,}3x_1 & - & 84{,}0x_2 & - & 23{,}5x_3 & + & 11{,}4x_4 & = & -80{,}8 \\ 21{,}0x_1 & - & 81{,}0x_2 & - & 13{,}2x_3 & + & 21{,}5x_4 & = & -106{,}3 \end{array}$$

Linha	Multiplicador	Coeficientes das Incógnitas				Termos Independentes	Transformações
(1)		8,7	3,0	9,3	11,0	16,4	
(2)	−2,82	24,5	−8,8	11,5	−45,1	−49,7	
(3)	−6,01	52,3	−84,0	−23,5	11,4	−80,8	
(4)	−2,41	21,0	−81,0	−13,2	21,5	−106,3	
(5)		0,0	−17,26	−14,73	−76,12	−95,95	−2,82(1)+(2)
(6)	−5,91	0,0	−102,03	−79,39	−54,71	−179,36	−6,01(1)+(3)
(7)	−5,11	0,0	−88,23	−35,61	−5,01	−145,82	−2,41(1)+(4)
(8)		0,0	0,0	7,66	395,16	387,70	−5,91(5)+(6)
(9)	−5,18	0,0	0,0	39,66	383,96	344,48	−5,11(5)+(7)
(10)		0,0	0,0	0,0	−1662,97	−1663,81	−5,18(8)+(9)

O sistema triangular obtido após as transformações é:

$$
\begin{aligned}
8{,}7x_1 + 3{,}0x_2 + 9{,}3x_3 + 11{,}0x_4 &= 16{,}4 \\
-17{,}26x_2 - 14{,}73x_3 - 76{,}12x_4 &= -95{,}95 \\
7{,}66x_3 + 395{,}16x_4 &= 387{,}70 \\
-1662{,}97x_4 &= -1663{,}81
\end{aligned}
$$

−0,97

$$\bar{\mathbf{x}} = [0{,}97 \quad 1{,}98 \quad -0{,}97 \quad 1{,}00]^T$$

Uma medida para avaliar a precisão dos cálculos é o resíduo, que é dado por:

$$r = b - A\bar{\mathbf{x}}$$

isto é,

$$
r = \begin{bmatrix} 16{,}4 \\ -49{,}7 \\ -80{,}8 \\ -106{,}3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8{,}7 & 3{,}0 & 9{,}3 & 11{,}0 \\ 24{,}5 & -8{,}8 & 11{,}5 & -45{,}1 \\ 52{,}3 & -84{,}0 & -23{,}5 & 11{,}4 \\ 21{,}0 & -81{,}0 & -13{,}2 & 21{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}97 \\ 1{,}98 \\ -0{,}97 \\ 1{,}00 \end{bmatrix}
$$

$$
r = \begin{bmatrix} 0{,}042 \\ 0{,}214 \\ 0{,}594 \\ -0{,}594 \end{bmatrix}
$$