2.1.2. Sistemas Triangulares

Seja um sistema S_n:

$Ax = b$

onde a matriz $A = (a_{ij})$ é tal que $a_{ij} = 0$ se $j < i$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$, ou seja

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \tag{2.4}$$

Um sistema deste tipo é chamado ***triangular superior*** enquanto que se $a_{ij} = 0$ para $j > i$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ tem-se um sistema ***triangular inferior***:

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{array}\right. \tag{2.5}$$

Observe-se que os sistemas triangulares determinados, isto é, quando $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, são facilmente resolvidos por substituição retroativa ou progressiva. No caso do sistema (2.4), por exemplo, calcula-se $x_n = b_n/a_{nn}$ $(a_{nn} \neq 0)$ na n-ésima equação; a seguir, leva-se o valor de x_n na $(n-1)$-ésima equação e calcula-se o valor de x_{n-1} $(a_{n-1,\, n-1} \neq 0)$ e assim sucessivamente até o cálculo de x_1 $(a_{11} \neq 0)$. Neste caso, o sistema possui solução única. Entretanto, poderia haver algum elemento nulo na diagonal e, neste caso, surgiriam equações do seguinte tipo:

$$0x_i = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \tag{2.6}$$

Observando a equação acima pode-se distinguir dois casos:

1º) $b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j = 0$: o sistema admite mais de uma solução pois, qualquer que seja o valor de x_i, a equação (2.6) será satisfeita; logo o sistema é *indeterminado.*

2º) $b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \neq 0$: o sistema não admite solução pois

não existe valor de x_i que satisfaça a equação (2.6); logo, o sistema é *incompatível.*

Exemplo 2.4

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ \quad\quad x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ \quad\quad\quad 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ \quad\quad\quad\quad 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Substituições retroativas:

$$x_4 = \frac{2}{2} \rightarrow x_4 = 1$$

$$4x_3 - 5 \cdot 1 = 3 \rightarrow x_3 = 2$$

$$x_2 + 2 - 2 \cdot 1 = -1 \rightarrow x_2 = -1$$

$$3x_1 + 4(-1) - 5 \cdot 2 + 1 = -10 \rightarrow x_1 = 1$$

A solução é $\bar{\mathbf{x}} = [1 \;\; -1 \;\; 2 \;\; 1]^T$.

O sistema é determinado.

Exemplo 2.5

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ \quad\quad\quad x_3 - 2x_4 = 0 \\ \quad\quad\quad 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ \quad\quad\quad\quad 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Substituições retroativas:

$$x_4 = \frac{2}{2} \rightarrow x_4 = 1$$

$$4x_3 - 5 \cdot 1 = 3 \rightarrow x_3 = 2$$

$$0x_2 + 2 - 2 \cdot 1 = 0 \rightarrow 0x_2 = 0$$

Qualquer valor de x_2 satisfaz a equação acima. Seja, então, $x_2 = \lambda$:

$$3x_1 + 4\lambda - 5 \cdot 2 + 1 = -10 \rightarrow x_1 = -\frac{1 + 4\lambda}{3}$$

A solução é $\overline{\mathbf{x}} = \left[-\frac{1 + 4\lambda}{3} \quad \lambda \quad 2 \quad 1\right]^T$

O sistema é *indeterminado*.

Exemplo 2.6

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ \qquad\qquad\quad x_3 - 2x_4 = -1 \\ \qquad\qquad\quad 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Substituições retroativas:

$$x_4 = \frac{2}{2} \rightarrow x_4 = 1$$

$$4x_3 - 5 \cdot 1 = 3 \rightarrow x_3 = 2$$

$$0x_2 + 2 - 2 \cdot 1 = -1 \rightarrow 0x_2 = -1$$

Nenhum valor de x_2 satisfaz a equação acima. O sistema é *incompatível* pois não admite solução.