1.3.3. Erros de Truncamento

São erros provenientes da utilização de processos que deveriam ser infinitos ou muito grandes para a determinação de um valor e que, por razões práticas, são truncados.

Estes processos infinitos são muito utilizados na avaliação de funções matemáticas, tais como, exponenciação, logaritmos, funções trigonométricas e várias outras que uma máquina pode ter.

A solução adotada é a de interromper os cálculos quando uma determinada precisão é atingida.

De uma maneira geral, pode-se dizer que o erro de truncamento pode ser diminuído até chegar a ficar da ordem do erro de arredondamento; a partir deste ponto, não faz sentido diminuir-se mais, pois o erro de arredondamento será dominante.

1.3.4. Propagação de Erros

Será mostrado abaixo, através de um exemplo, como os erros descritos anteriormente podem influenciar o desenvolvimento de um cálculo.

Exemplo 1.21

Supondo-se que as operações abaixo sejam processadas em uma máquina com 4 dígitos significativos e fazendo-se

$$x_1 = 0{,}3491 \cdot 10^4$$
$$x_2 = 0{,}2345 \cdot 10^0$$

tem-se:

$$\begin{aligned}(x_2 + x_1) - x_1 &= (0{,}2345 \cdot 10^0 + 0{,}3491 \cdot 10^4) - 0{,}3491 \cdot 10^4\\ &= 0{,}3491 \cdot 10^4 - 0{,}3491 \cdot 10^4\\ &= 0{,}0000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 + (x_1 - x_1) &= 0{,}2345 \cdot 10^0 + (0{,}3491 \cdot 10^4 - 0{,}3491 \cdot 10^4)\\ &= 0{,}2345 + 0{,}0000\\ &= 0{,}2345\end{aligned}$$

Os dois resultados são diferentes, quando não deveriam ser, pois a adição é uma operação distributiva. A causa desta diferença foi um arredondamento feito na adição $(x_2 + x_1)$, cujo resultado tem 8 dígitos. Como a máquina só armazena 4 dígitos, os menos significativos foram desprezados.

Ao se utilizar máquinas de calcular deve-se estar atento a essas particularidades causadas pelo erro de arredondamento, não só na adição mas também nas outras operações.

Exemplo 1.22

À seguir, é apresentado um outro exemplo de como a ordem de execução de operações pode influir na solução obtida.

Para o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 0{,}0030\,x_1 + 30{,}0000\,x_2 = 5{,}0010 \\ 1{,}0000\,x_1 + 4{,}0000\,x_2 = 1{,}0000 \end{cases}$$

a solução exata é: $x_1 = 1/3$ e $x_2 = 1/6$

Multiplicando a 1ª equação por $(-1/0{,}003)$, tem-se:

$$\begin{cases} -1{,}0000x_1 - 10.000{,}0000x_2 = -1.667{,}0000 \\ 1{,}0000x_1 + 4{,}0000x_2 = 1{,}0000 \end{cases}$$

somando a segunda equação à primeira, elimina-se x_1

$$-9.996{,}0000x_2 = -1.666{,}0000$$

$$x_2 = \frac{-1.666{,}0000}{-9.996{,}0000} = 0{,}1667$$

levando este valor à primeira equação, tem-se:

$$-1{,}0000x_1 - 10.000{,}000\,(0{,}1667) = -1.667{,}0000$$

$$x_1 = 0{,}0000$$

Este valor encontrado para x_1 é função da diferença de ordem de grandeza dos coeficientes de x_1 e x_2 na 1ª equação.

Se a ordem das equações é invertida, tem-se:

$$\begin{cases} 1{,}0000\,x_1 + 4{,}0000\,x_2 = 1{,}0000 \\ 0{,}0030\,x_1 + 30{,}0000\,x_2 = 5{,}0010 \end{cases}$$

multiplicando-se a 1ª equação por $-0{,}0030$, vem:

$$\begin{cases} -0{,}0030x_1 - 0{,}0120x_2 = -0{,}0030 \\ 0{,}0030x_1 + 30{,}0000x_2 = 5{,}0010 \end{cases}$$

somando-se a 1ª com a 2ª equação:

$$29{,}9880x_2 = 4{,}9980$$

$$x_2 = 0{,}1667$$

levando, à 1ª equação, o valor de x_2, encontra-se:

$$-0{,}0030x_1 - 0{,}0120\,(0{,}1667) = -0{,}0030$$

$$x_1 = 0{,}3333$$