1.3.2. Erros de Arredondamento

Um número é representado, internamente, na máquina de calcular ou no computador digital através de uma seqüência de impulsos elétricos que indicam dois estados: 0 ou 1, ou seja, os números são representados na base 2 ou binária.

De uma maneira geral, um número x é representado na base β por:

$$x = \pm \left[\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \frac{d_3}{\beta^3} + \ldots + \frac{d_t}{\beta^t} \right] \cdot \beta^{exp}$$

onde:

d_i — são números inteiros contidos no intervalo

$$0 \leqslant d_i \leqslant \beta - 1 \,; i = 1, 2, \ldots, t$$

exp — representa o expoente de β e assume valores entre

$$I \leqslant exp \leqslant S$$

I, S — limite inferior e limite superior, respectivamente, para a variação do expoente

$\left[\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \frac{d_3}{\beta^3} + \ldots + \frac{d_t}{\beta^t} \right]$ é chamada de mantissa e é a parte do número que representa seus dígitos significativos e t é o número de dígitos significativos do sistema de representação, comumente chamado de precisão da máquina.

Exemplo 1.11

No sistema de base $\beta = 10$, tem-se:

$$0{,}345_{10} = \left(\frac{3}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{5}{10^3} \right) \cdot 10^0$$

$$31{,}415_{10} = 0{,}31415 \cdot 10^2 = \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{5}{10^5} \right) \cdot 10^2$$

Os números assim representados estão normalizados, isto é, a mantissa é um valor entre 0 e 1.

Exemplo 1.12

No sistema binário, tem-se:

$$5_{10} = 101_2 = 0{,}101 \cdot 2^3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} \right) \cdot 2^3$$

$$4_{10} = 100_2 = 0{,}1 \cdot 2^3 = \frac{1}{2} \cdot 2^3$$

Exemplo 1.13

Numa máquina de calcular cujo sistema de representação utilizado tenha $\beta = 2$, $t = 10$, $I = -15$ e $S = 15$, o número 25 na base decimal é, assim representado:

$$25_{10} = 11001_2 = 0{,}11001 \cdot 2^5 = 0{,}11001 \cdot 2^{101}$$

$$\left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \frac{0}{2^9} + \frac{0}{2^{10}}\right) \cdot 2^{101}$$

ou, de uma forma mais compacta:

MANTISSA	EXPOENTE
1 1 0 0 1 0 0 0 0 0	1 0 1

Cada dígito é chamado de bit, portanto, nesta máquina são utilizados 10 bits para a mantissa, 4 bits para o expoente e mais um bit para o sinal da mantissa (se bit = 0 positivo, se bit = 1 negativo) e um bit para o sinal do expoente, resultando, no total, 16 bits, que são assim representados:

$25_{10} =$

SINAL DA MANTISSA	VALOR DA MANTISSA										SINAL DO EXPOENTE	VALOR DO EXPOENTE			
0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

Exemplo 1.14

Utilizando a mesma máquina do exemplo anterior, a representação de $3{,}5_{10}$ seria dada por:

$$3{,}5_{10} = 0{,}111 \cdot 2^{10}$$

0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Exemplo 1.15

Ainda utilizando a mesma máquina do exemplo 1.13, o número $-7{,}125_{10}$ seria assim representado:

$$-7{,}125_{10} = -0{,}111001 \cdot 2^{11}$$

1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

O maior valor representado por esta máquina descrita no exemplo 1.13 seria:

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1

que, na base decimal, tem o seguinte valor:

$$0{,}1111111111 \cdot 2^{1111} = 32736_{10}$$

E o menor valor seria:

$$-0{,}1111111111 \cdot 2^{1111} = -32736_{10}$$

Logo, os números que podem ser representados nesta máquina estariam contidos no intervalo $[-32736 ; 32736]$.

Nesta máquina, ainda, o valor zero seria representado por:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

O próximo número positivo representado seria:

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

$0{,}1 \cdot 2^{-15} = 0{,}000015259$

O subseqüente seria:

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

$0{,}1000000001 \cdot 2^{-15} = 0{,}000015289$

Através desses exemplos pode-se concluir que o conjunto dos números representáveis neste sistema é um subconjunto dos números reais, dentro do intervalo mostrado anteriormente.

O número de elementos deste conjunto é dado pela fórmula:

$$2\,(\beta - 1)\,(S - I + 1)\;\beta^{t-1} + 1$$

ou seja:

$$2 \cdot (2 - 1) \cdot (15 - (-15) + 1) \cdot 2^{10-1} + 1 = 31745$$

Estes números não estão igualmente espaçados dentro do intervalo.

Ao se tentar representar números reais por meio deste sistema, certamente se incorre nos chamados erros de arredondamento, pois nem todos os números reais têm representação no sistema.

Exemplo 1.16

Qual seria a representação de $0{,}00001527_{10}$?

Já foi visto anteriormente que os números $0{,}000015259_{10}$ e $0{,}000015289_{10}$ são representáveis, mas que não existe entre os dois nenhum outro número representável, logo o número 0,00001527 será representado como o número 0,000015259, pois é o valor que tem representação binária mais próxima do valor binário de 0,00001527.

Um outro problema que pode surgir ao se representar valores decimais na forma binária está ligado ao fato de não haver tal representação finita.

PASCAL

```
program precisao;
uses wincrt;
var
  eps, eps1 : real;
begin
    eps := 1;
    repeat
         eps := eps / 2;
         eps1 := eps + 1;
    until eps1 <= 1;
    writeln(eps);
end.
```

4.5474735089E-13

MATLAB

```
eps = 1;
eps1 = 2;
while eps1 > 1
   eps = eps/2;
   eps1 = eps +1;
end;
eps
```

1.1102E-016

Exemplo 1.17

$0{,}1_{10} = 0{,}000110011001100\ldots_2$

O valor decimal 0,1 tem como representação binária um número com infinitos dígitos, logo, ao se representar $0{,}1_{10}$ nesta máquina comete-se um erro, pois:

0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	$= 0{,}099976_{10}$

Pode ser mostrado que uma fração racional na base 10 pode ser escrita, exatamente, com um número finito de dígitos binários somente se puder ser escrita como o quociente de dois inteiros r/s, onde $s = 2^N$ para um inteiro N. Infelizmente, apenas uma pequena parte das frações racionais satisfaz esta condição.

Como ilustração, são apresentados abaixo os sistemas de representação de algumas máquinas.

Máquina	β	t	I	S
Burroughs 5500	8	13	− 51	77
Burroughs 6700	8	13	− 63	63
Hewlett-Packard 45	10	10	− 98	100
Texas SR-5X	10	12	− 98	100
PDP-11	2	24	− 128	127
IBM/360	16	6	− 64	63
IBM/370	16	14	− 64	63
Quartzil QI 800	2	24	− 127	127

Um parâmetro que é muito utilizado para se avaliar a precisão de um determinado sistema de representação é o número de casas decimais exatas da mantissa e este valor é dado pelo valor decimal do último bit da mantissa, ou seja, o bit de maior significância. Logo:

$$\text{PRECISÃO} \leqslant \frac{1}{\beta^t}$$

Exemplo 1.18

Numa máquina com $\beta = 2$ e $t = 10$, a precisão da mantissa é da ordem de $\frac{1}{2^{10}} = 10^{-3}$. Logo, o número de dígitos significativos é 3.

Para concluir este item sobre erros de arredondamento, deve-se ressaltar a importância de se saber o número de dígitos significativos do sistema de representação da máquina que está sendo utilizada para que se tenha noção da precisão do resultado obtido.