Notas de aula --- Parte II

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Escritas pelo Professor Wilson Canesin

Utilizada na disciplina Matemática C para o curso de Ciências Aeronáuticas da Universidade Braz Cubas

1- FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Em muitas situações práticas, o valor de uma certa quantidade, depende dos valores de duas outras ou de três outras. Então, é usual representar estas relações como funções de várias variáveis.

Por exemplo, numa fábrica, uma quantidade chamada de produção (P), depende do número de homens-hora (L) e do número de máquinas (K) , usadas para produzir algum produto. A representação funcional dessa relação é

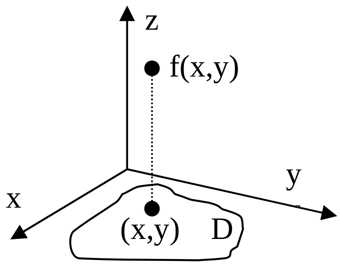
$$P = f(L, K)$$

O mesmo conceito se estende para qualquer número de variáveis.

1.2 – Funções de duas variáveis

Seja D um subconjunto (região) do espaço R^2 (plano) . Chama-se função f de D toda relação que associa, a cada par (x,y) ε D, um único número real, representado por f(x,y). O conjunto D é o domínio da função.

Assim,
D é o domínio da função em R^2 ,
f é a função
f(x,y) é o valor da função calculado em (x,y).



Exemplos de valores de função de 2 variáveis:

Ex.1- se $f(x,y) = x^2 + 2y$, então $f(2,3) = 2^2 + 2.3 = 10$

Ex.2- $f(x,y) = (3x+y^3)^{1/2}$ $f(1,2) = (3.1+2^3)^{1/2} = 3,32$

Domínio das funções de duas variáveis

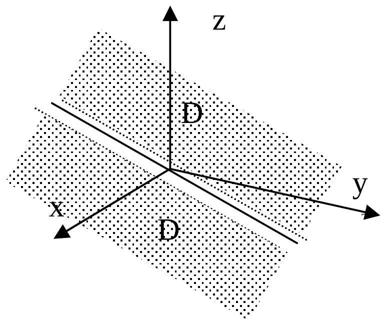
O domínio dessas funções segue as mesmas regras do domínio de funções de uma variável, ou seja, o domínio é a região D ε R^2 , tal que os valores calculados da função,para todo (x,y) ε D resultem em valores **finitos** e **reais** para f(x,y).

Ex.1- Achar o domínio da função $f(x,y) = \sqrt{y - x}$

A condição de existência dessa função é $y-x \geq 0$ (real) , portanto o seu domínio é $D =\{ (x,y) \ \varepsilon \ R^2 \ / \ y - x \geq 0 \}$.

Ex.2 – Ache o domínio da função f(x,y) = $\dfrac{x^2}{2x-y}$, a função é finita quando 2x-y$\neq$ 0. Assim, domínio D ε (xy) é o conjunto de pontos, tais que,

D ={ (x,y) ε R^2 / y $\neq$ 2x }.



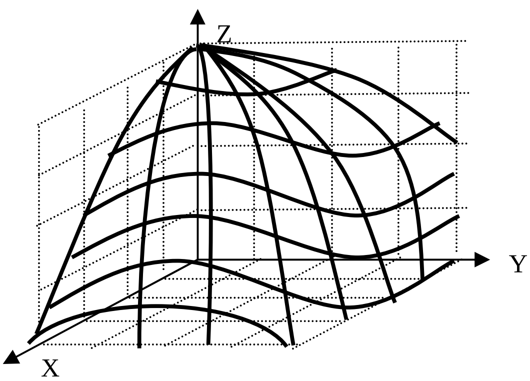
Ex.3 - Ache o domínio da função f(x,y) = $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-y}}$, a função é finita quando 3x - y > 0. O domínio é o conjunto de pontos, tais que,

D ={ (x,y) ε R^2 / 3x - y > 0 }.

1.3 - Gráfico de uma função de 2 variáveis

Já vimos que para as funções de uma variável, o gráfico é no plano x,y e y=f(x).

Para funções de 2 variáveis o gráfico é em R^3 e z = f(x,y). Uma função de 2 variáveis sempre gera uma superfície no espaço R^3.



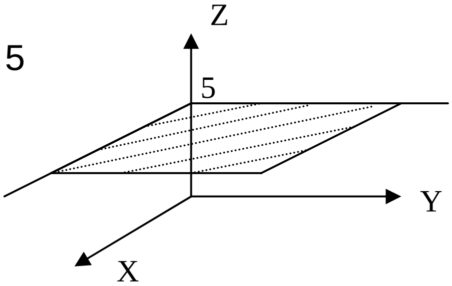
A superfície é obtida para cada par x,y , fixando um valor de x e variando y, em seguida fixa um 2º valor de x e varia y , depois fixa um 3º x e varia y ,etc., até variar x e y em todo o domínio.

X	Y
0	0
0	1
0	2
0	3
1	0
1	1
1	2
1	3
2	0
2	1
2	2
2	3
3	0
3	1
...	...

Exemplos de funções de 2 variáveis:

Ex.1 – A função é $z = f(x,y) = 5$

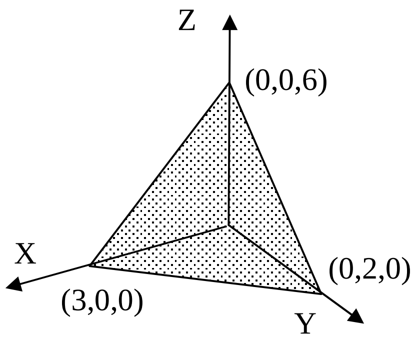
A superfície é um plano infinito, paralelo a x,y e passando por z=5



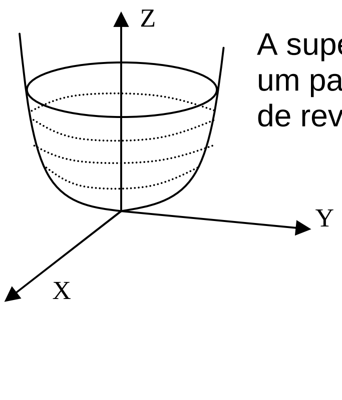
Ex.2 - A função é $z = f(x,y) = 6 - 2x + 3y$. Esta função pode ser escrita na forma $2x - 3y + z = 6$ que é a equação de um plano. Para achar os pontos onde este plano intercepta os eixos, é so fazer :

a) $x = 0$ e $y = 0 \rightarrow z = 6$
b) $x = 0$ e $z = 0 \rightarrow y = 2$
c) $y = 0$ e $z = 0 \rightarrow x = 3$

Portanto, o gráfico de f no plano é $\Rightarrow$

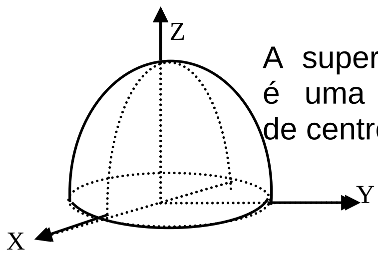


Ex.3 – A função é $z = f(x,y) = x^2 + y^2$



A superfície é um parabolóide de revolução.

Ex. 4 - A função é
$z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$



A superfície gerada é uma semi-esfera de centro na origem.

1.4 – Limite e Continuidade de Funções de 2 Variáveis

O limite da função f(x,y), quando (x,y) tende para um valor (x_0,y_0), é o número L (se existir) e é representado por

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

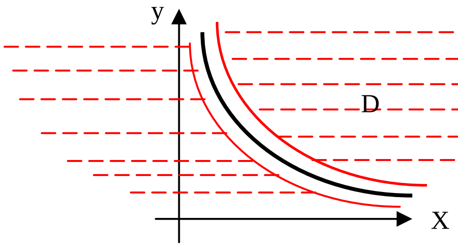
Se o limite existir (resultar em um valor finito e real) no ponto (x_0 , y_0), dizemos que a função é contínua neste ponto. Caso contrário a função será descontínua no ponto. O mesmo é válido para um intervalo, isto é, a função é contínua num intervalo quando o limite existe em todos seus pontos desse intervalo. Em geral é fácil verificar a continuidade das funções, por simples inspeção da mesma.

Nas funções abaixo o limite existirá sempre,com exceção nas restrições.

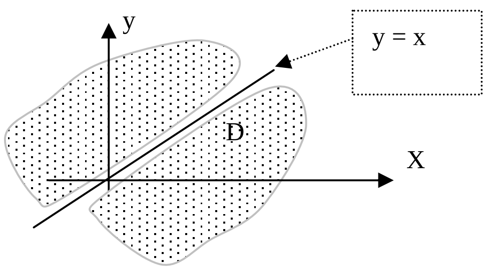
Ex. 1 $f(x,y) = x^2 + y^2 – xy$, é contínua para todo par x,y

Ex.2 $f(x,y) = x^3y^2 –xy + y^3 + 6$, contínua $\forall$ x , y

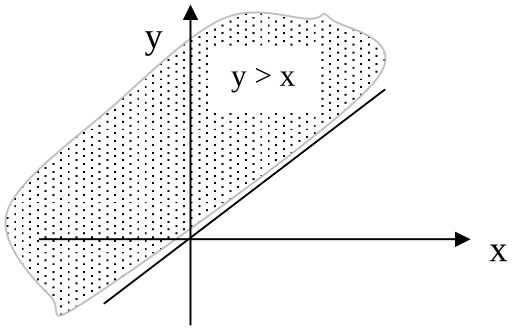
Ex.3 $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x\,y - 1}$ é contínua $\forall$ $x.y \neq 1$ ou $y \neq 1/x$



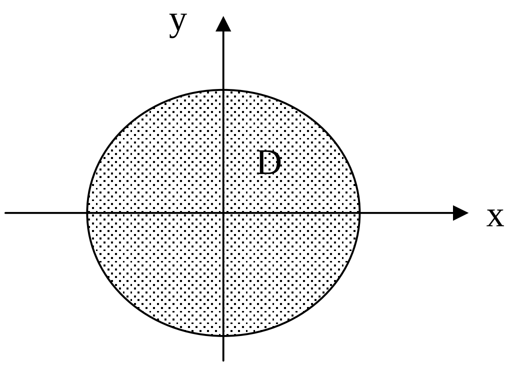
Ex. 4 $f(x,y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ é contínua se $\forall$ $x \neq y$



Ex.5 $f(x,y) = \ln(x-y)$ é contínua $\forall x,y$ tal que $x - y > 0$
ou $y > x$

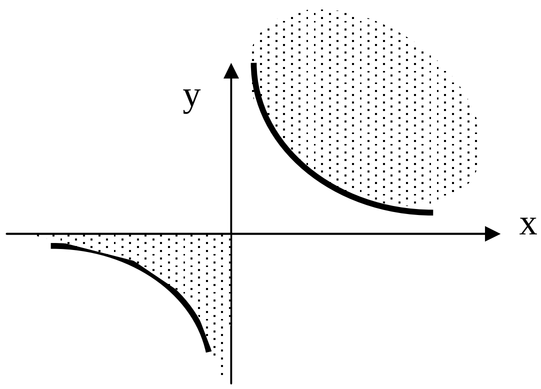


Ex.6 $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ é contínua se $1-x^2-y^2 \geq 0$,ou $x^2+y^2 \leq 1$



O domínio é uma circunferência de centro na origem e de raio $r \leq 1$

Ex.7 $f(x,y) = \sqrt{y-1/x}$ a função é contínua se $y - 1/x \geq 0$, $y \geq 1/x$
Que resulta no gráfico:



1.5 – Derivadas de Funções de 2 Variáveis

A definição de derivada parcial de uma função de 2 variáveis é a mesma que a de funções de uma variável. A única diferença aqui é que , como se tem duas variáveis , uma delas deve ser mantida fixa enquanto se dá acréscimos para a outra. Assim, seja a função f(x,y) , sua derivada em relação a x é

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$ incremento da função

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$ taxa de variação da função

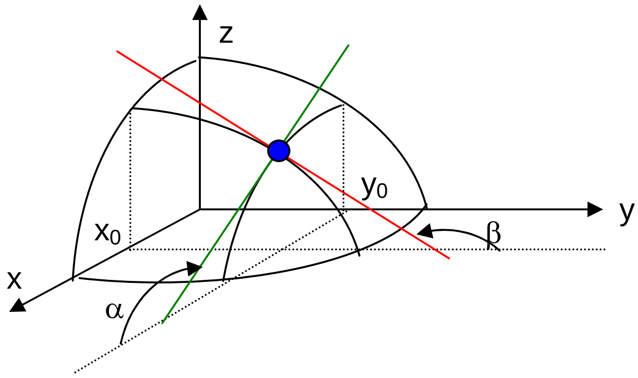
$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) \quad \text{Derivada parcial em x}}$$

Analogamente , se mantivermos agora o valor de x constante a derivada parcial em relação a y é

$$\boxed{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) \quad \text{Derivada parcial em y}}$$

1.6 – Interpretação geométrica da derivada parcial

Nas funções de uma variável, a derivada mede a inclinação da reta tangente à curva no ponto dado. Nas funções do tipo f(x,y) de duas variáveis, a derivada em relação a x, mede a inclinação da reta tangente à superfície, no ponto dado (x_0 ,y_0,z_0) e numa seção paralela ao eixo x, com y constante, e numa seção paralela a y e com x constante.



Assim,

$\tan\alpha = f_x(x_0,y_0) = \partial f / \partial x$

$\tan\beta = f_y(x_0,y_0) = \partial f / \partial y$

	TABELA DE DERIVADAS	(adaptada p/derivadas parciais)
Número	Função $f = f(x,y)$	Derivada $f_s = \partial f/\partial s$, $s = x,y$
1	$f = k$ (k = constante)	$f_s = 0$ (derivada de 1 const.)
2	$f = x$ ou $f = y$	$f_s = 1$ $s = x$ ou y
3	$f = u^n$; $u = f(x,y)$	$D_s\, u^n = n\, u^{n-1}\, u_s$, $u_s=\partial u/\partial(x,y)$
4	$f = \sqrt[n]{u^m}$	$D_s \sqrt[n]{u^m} = \dfrac{m\, u_s}{n\, u} \sqrt[n]{u^m}$
5	$f = \ln u$	$D_s \ln u = \dfrac{u_s}{u}$
6	$f = \lg_a u$	$D_s \lg_a u = \dfrac{u_s}{u \ln a}$
7	$f = a^u$	$D_s\, a^u = a^u \ln a\, u_s$
8	$f = e^u$	$D_s\, e^u = e^u\, u_s$
9	$f = u\, v$	$f_s = v\, u_s + u\, v_s$
10	$f = u / v$, $u_s=\partial u/\partial(x,y)$	$f_s =(v\, u_s - u\, v_s) / v^2$
11	$f = \text{sen}u$	$f_s = \cos u\, .u_s$
12	$f = \cos u$	$f_s = -\text{sen}u\, .u_s$
13	$f = \tan u$	$f_s = \sec^2 u\, .u_s$
14	$f = \sec u$	$f_s = \sec u.\tan u.u_s$
15	$f = \csc u$	$f_s = -\csc u.\cot u.u_s$
16	$f = \cot u$	$f_s = -\cot u.\csc u.u_s$

1.6.1- A técnica de Derivadas Parciais

A derivada parcial em relação a "x" , considera y como constante, enquanto que a derivada parcial em relação na "y" considera x como constante.

$f_x = \partial f / \partial x \rightarrow$ y=constante

$f_y = \partial f / \partial y \rightarrow$ x=constante

Ex.1- Derivar a função $f(x,y) = 3x^3y^2$

$f_x = \partial (3x^3y^2) / \partial x = 9x^2y^2$ $\qquad$ $f_y = \partial (3x^3y^2) / \partial y = 6x^3y$

Ex.2 - Derivar a função $f(x,y) = x^2 + y^2$

$f_x = \partial (x^2 + y^2) / \partial x = 2x$ $\qquad$ $f_y = \partial (x^2 + y^2) / \partial y = 2y$

Ex.3 - Derivar a função $f(x,y) = x /(x^2 + y^2)$

$f = u / v$, $u = x$ e $v = x^2 + y^2$ $\qquad$ $f_s = [v\, u_s - u\, v_s]/v^2$

$f_x = [(x^2 + y^2).1 - x.\, 2x]/(x^2 + y^2)^2 = (y^2-x^2)/(x^2 + y^2)^2$

$f_y = [(x^2 + y^2).0 - x.\, 2y]/(x^2 + y^2)^2 = -2xy/(x^2 + y^2)^2$

Ex.4 – Calcular a inclinação da reta tangente à interseção da superfície $z = 4x^2y - xy^3$, com o plano y=2 no ponto (3,2 ,48).
Solução: Para derivar em relação a x, mantém y constante.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4x^2y) - \frac{\partial}{\partial x}(x\,y^3) \quad = 8xy - y^3$$

mas no ponto x=3 e y=2 , tem-se

$$\tan\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(3,2) = 40 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}(40) = 88{,}57°$$

Ex. 6 – Calcular a inclinação da tangente à interseção da superfície $z = x^3 + y^2 + 2xy$, com plano y = 1 no ponto (1,1,4).

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = $3x^2 + 2y$

tanα = $\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}1)$ = 5 $\Rightarrow$ α = $\tan^{-1}(5)$ = 78,69°

Ex. 7 – Achar as derivadas parciais da função $f(x,y) = (x^2 + y^3).\text{senx}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (u.v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}.v + u.\frac{\partial v}{\partial x} = 2x.\text{senx} + (x^2 + y^3).\cos x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (u.v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}.v + u.\frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2.\text{senx} + (x^2 + y^3).0 = 3y^2.\text{senx}$$

1.7 – Diferencial total de uma função de 2 ou mais variáveis

A condição para que uma função seja diferenciável é que suas derivadas parciais existam. Assim, dada a função z = f(x,y) , sua diferencial total é :

$$d\,z = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Ex.1 diferenciar a função $z = 3x^3y^2 - 2xy^3 + xy - 1$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2y^2 - 2y^3 + y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y - 6xy^2 + x$

assim, a diferencial da função é

$$df = (9x^2y^2 - 2y^3 + y)\,dx + (6x^3y - 6xy^2 + x)\,dy$$

A função de várias variáveis é diferenciável se suas derivadas parciais forem contínuas. A diferencial de uma função $F(x_1,x_2,...x_n)$ de n variáveis é:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}dx_i$$

Ex.2-Calcule a diferencial da função $F(x,y,z) = 2x + 3xy - 2zy$

$F_x = 2+3y$; $F_y = 3x-2z$; $F_z = -2y$

$dF = (2+3y)\,dx + (3x-2z)dy - 2ydz$

1.8 – Derivada de funções compostas

Seja a função f(x,y) onde por sua vez $x = x(t)$ e $y = y(t)$. A derivada desta função em relação a "t" é

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ex.1 Calcular a derivada da função $F(x,y) = x^2 + 3y - 5$, onde $x(t) = e^t$ e $y(t) = t^3$.

a) A função pode ser posta em função de t , $F(t) = e^{2t} + 3t^3 - 5$

   E a derivada $dF/dt = 2\,e^{2t} + 9t^2$

b) Calcula-se pelas derivadas parciais

   $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 3$; $\frac{dx}{dt} = e^t$; $\frac{dy}{dt} = 3t^2$

   Assim

   $$\frac{dF}{dt} = 2x.e^t + 3.3t^2 = 2\,e^t + 9t^2$$

Se a função tiver mais de 2 variáveis, $f(x_1,x_2,...x_n)$, onde $x_1(t)$, $x_2(t),...x_n(t)$, são funções de t, então a sua derivada em relação a "t" é dada pela regra da cadeia

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

Ex.2– Dada a função $f(x,y,z) = 2x+3y-2z$, onde $x=\text{sen}t$, $y=e^t$ e $z = t^2$

$f_x = 2$, $f_y = 3$, $f_x = -2$, $dx/dt = \cos t$; $dy/dt = e^t$; $dz/dt = 2t$

$$\frac{df}{dt} = 2.\cos t + 3.e^t - 4t$$

Exercícios propostos: achar as derivadas df/dt

1) $f(x,y,z) = x + x^2y + 3xyz$, com $x = \text{sen}\,t$; $y = \cos t$ e $z = t^3$
2) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$, com $x = t^2$; $y = t^3$ e $z = t-1$
3) $f(x,y,z) = x^2y + 3yz^2$, com $x = 1/t$; $y = 1/t^2$ e $z = 1/t^3$

1.9 – Derivada de uma função implícita de 2 ou mais variáveis

Uma função está na forma implícita, quando não está resolvida para uma variável específica. As funções resolvidas para uma variável são chamadas de explícitas. Exemplo, $y = f(x)$, $z = f(x,y)$. Na forma implícita seria $f(x,y)=0$, $f(x,y,z) = 0$, etc.

A derivada de uma função implícita do tipo $f(x,y)=0$, em relação a x é

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

ou,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{f_x}{f_y}}$$

Ex.1 – Derivar a função $f(x,y) = 2x^2 + 5y^3 + 2 = 0$ usado, diretamente a fórmula acima,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{4x}{15y^2}$$

Ex.2 – Derivar a função $f(x,y) = 4y^2 - 6xy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{6y}{8y - 6x}$$

Para mais de 2 variáveis, $F(x,y,z) = 0$. Fazendo $u = f(x,y,z)$ e diferenciando, e após algumas considerações teremos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial z} = -\frac{f_x}{f_z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial z} = -\frac{f_y}{f_z}$$

Ex.3 - Achar as derivadas $\partial z / \partial x$ e $\partial z / \partial y$, da função $x^2+y^3-z=0$.
Solução;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial z} = \frac{-2x}{-1} = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial z} = \frac{-3x^2}{-1} = 3y^2$$

Exercícios propostos: Derivar as funções implícitas e achar $\partial z / \partial x$ e $\partial z / \partial y$, nas expressões abaixo

1) $2x^3 - 4y^2 - 6z = 0$

2) $x^2 + xy^2 + xyz^3 - 3 = 0$

1.10 – Derivadas parciais de segunda ordem

Se f é uma função de duas variáveis x e y, suas derivadas parciais são $f_x = \partial f / \partial x$ e $f_y = \partial f / \partial y$. Se derivarmos essas derivadas mais uma vez, obteremos as derivadas parciais de segunda ordem, que são representadas por

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad , \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad , \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Quando a função e suas derivadas são contínuas, as derivadas cruzadas são iguais , ou seja $f_{xy} = f_{yx}$.

Ex.1 – Calcular as derivadas de $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 - 6xy$

$f_x = \partial f / \partial x = 8x - 6y$ e $f_y = \partial f / \partial y = 6y - 6x$

$f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ = 8 ; ; $f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ = -6

$f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ = -6 ; $f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ = -6

EX.2 - Calcular as derivadas de f(x,y) = e^{2x+5y}

$f_x = \partial f / \partial x = 2e^{2x+5y}$ $f_y = \partial f / \partial y = 5e^{2x+5y}$

$f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4e^{2x+5y}$; $f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 10e^{2x+5y}$

$f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 10e^{2x+5y}$; $f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 25e^{2x+5y}$

Note que $f_{xy} = f_{yx}$

EX.3 - Calcular as derivadas de f(x,y) = $\ln(x^2+y^2)$

$f_x = \partial f / \partial x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$; $f_y = \partial f / \partial y = \dfrac{2y}{x^2+y^2} = \dfrac{U}{V}$

$f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{V.U_x - U.V_x}{V^2} = \dfrac{2(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}$; $f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$

$f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{V.U_y - U.V_y}{V^2} = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$; $f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{2(x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

1.11 – Derivadas Parciais de Funções de Várias Variáveis

As derivadas parciais têm a mesma definição já vista para 2 variáveis e são representadas da mesma forma.
Exemplos:

1) $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2x$

   $f_x = 2x+z^2$; $f_y = 3y^2$; $f_z = 2zx$

2) $f(x,y,z,t) = \ln(2x + 3y - z^2 + t^2)$

   $f_x = \dfrac{2}{2x+3y-z^2+t^2}$; $f_y = \dfrac{3}{2x+3y-z^2+t^2}$

   $f_z = \dfrac{-2z}{2x+3y-z^2+t^2}$; $f_t = \dfrac{2t}{2x+3y-z^2+t^2}$

Exercícios propostos - Derivar as funções:

1) $f(x,y,z) = 3x+5y-6z$
2) $f(x,y,z) = 2xy+2xz+3yz$
3) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y}{x-z}$
4) $f(x,y,z) = \sqrt{xyz}$
5) $f(x,y,z) = (x^2+2y-3z)^3$
6) $f(x,y,z,t) = 2x-3zt$
7) $f(x,y,z,t) = \ln(3x^2+5y^2-zt^3)$

1.12 – Derivadas de Ordem Superior

Seja a função f de n variáveis x,y,z,...r,s,t . As suas derivadas de ordem superior são calculadas a partir de suas primeiras derivadas.
f_x ,f_y,...f_r,f_s,f_t , ou seja f_{xx} ,f_{xy},...f_{xt} ; f_{yx},f_{yy},...,f_{ys},f_{yt} , etc.

Ex.1 – $f(x,y,z) = x^2 + 4xy^2 – 3y^2z^3$

$f_x = 2x + 4y^2$; $f_{xx} = 2$; $f_{xy} = 8y$; $f_{xz} = 0$

$f_y = 8xy – 6yz^3$; $f_{yx} = 8y$; $f_{yy} = 8x – 6z^3$; $f_{yz} = -18yz^2$

$f_z = -9y^2z^2$; $f_{zx} = 0$; $f_{zy} = -18yz^2$; $f_{zz} = -18y^2 z$

Ex.2 – Calcule as derivadas de ordem superior da função :

$f(x,y,z) = \ln(xy^2z^3)$ .Lembrando que $D_s \ln u = u_s / u$ e $D_s u^n = un^{n-1}u_s$

$f_x = y^2z^3 / xy^2z^3 = 1/x$; $f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(x^{-1}) = -1.x^{-2} = -1/x^2$

$f_{xy} = 0$; $f_{xz} = 0$

$f_y = 2xyz^3/xy^2z^3 = 2 / y$; $f_{yx} = 0$; $f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(2y^{-1}) = -2y^{-2} = -2 / y^2$

$f_{yz} = \frac{\partial}{\partial z}(2y^{-1}) = 0$

$f_z = 3xy^2z^2 / xy^2z^3 = 3 / z$; $f_{zx} = 0$; $f_{zy} = 0$; $f_{zz} = -3 / z^2$

EXERCÍCIOS -Derivar as funções a seguir (c/respostas)

1) $f(x,y,z)=2xy+3xz+4yz$ Resp. $f_x = 2y+3z$, $f_y = 2x+4z$, $f_z = 3x+4y$
$f_{xx}=0$; $f_{xy}=2$; $f_{xz}=3$
$f_{yx}=2$; $f_{yy}=0$; $f_{yz}=4$
$f_{zx}=3$; $f_{zy}=4$; $f_{zz} = 0$

2) $f(x,y,z) = \frac{x+y}{y-z}$; $f_x= 1/(y-z)$; $f_y=-(z+x)/(y-z)^2$; $f_z=(x+y)/(y-z)^2$
$f_{xx}=0$; $f_{xy}=-1/(y-z)^2$; $f_{xz}=1/(y-z)^2$;$f_{yx}=-1/(y-z)^2$; $f_{yy}=2(z+x)/(y-z)^3$;
$f_{yz}=(2x+y-z)/(y-z)^3$; $f_{zx}=1/((y-z)^2$; $f_{zy} = f_{yz}$; $f_{zz} =2(x+y)/(y-z)^3$

3) $f(x,y,z)=(x+2y+3z)^3$;$f_x=3(x+2y+3z)^2$; $f_y=6(x+2y+3z)^2$;$f_z=3(x+2y+3z)^2$

;$f_{xx}= 6(x+2y+3z)$; $f_{xy}= 12(x+2y+3z)$; $f_{xz}= 18(x+2y+3z)$ $f_{yx}= 12(x+2y+3z)$

;$f_{yy}=24(x+2y+3z)$; $f_{yz}= 36(x+2y+3z)$; $f_{zx}= 6(x+2y+3z)$; $f_{zy}= 12(x+2y+3z)$

; $f_{zz}= 18(x+2y+3z)$.

4) $f(x,y,z)=\sqrt{xyz} =(xyz)^{1/2}$; $f_x=(1/2).yz(xyz)^{-1/2}$; $f_y=(1/2).xz(xyz)^{-1/2}$

$f_z =(1/2).yx(xyz)^{-1/2}$; $f_{xx}=(-1/4)(yz)^2(xyz)^{-1/2}$;

$f_{xy}= (1/2)z(xyz)^{-1/2}-(1/4)(yz)^2(xyz)^{-1/2}$; $f_{xz}=(1/2)y(xyz)^{-1/2}-(1/4)(yz)^2(xyz)^{-1/2}$;

$f_{yx}=(1/2)z(xyz)^{-1/2}-(1/4)(xz)^2(xyz)^{-1/2}$;$f_{yz}= (1/2)x(xyz)^{-1/2}-(1/4)(xz)^2(xyz)^{-1/2}$;

f_{zx}=(1/2)y(xyz)$^{-1/2}$-(1/4)(yx)^2(xyz)$^{-1/2}$;f_{zy}= (1/2)x(xyz)$^{-1/2}$-(1/4)(yx)^2(xyz)$^{-1/2}$;

f_{zz}=(1/2)(yx)^2(xyz)$^{-1/2}$.

5) f(x,y,z,t) = ln(2x^2+y^2-zt^2) ; f_x=4x/(2x^2+y^2-zt^2) ; f_y=2y/(2x^2+y^2-zt^2)

f_z= -t^2 /(2x^2+y^2-zt^2) ; f_t=-2zt/(2x^2+y^2-zt^2) ;f_{xx}=4(y^2-zt^2)/((2x^2+y^2-zt^2)^2;

f_{xy}=-8xy/((2x^2+y^2-zt^2)^2 ; f_{xz}=4xt^2/((2x^2+y^2-zt^2)^2 ; f_{yx}=-8xy/(2x^2+y^2-zt^2)^2;

f_{yy}=(4x^2-2y^2-2zt^2)/(2x^2+y^2-zt^2)^2 ; f_{yz}=2yt^2/(2x^2+y^2-zt^2)^2;

f_{zx}=4xt^2/((2x^2+y^2-zt^2)^2 ; f_{zy}= 2yt^2/(2x^2+y^2-zt^2)2 ; f_{zz}=-t^4/(2x^2+y^2-zt^2)^2

6) f(x,y,z) = sen(x^2+xy+yz^2) ; f_x = -(2x+y)cos(x^2+xy+yz^2) ;

f_y=-(x+z^2)cos(x^2+xy+yz^2) ; f_z=-2yzcos(x^2+xy+yz^2);

f_{xx} = -2.cos(x^2+xy+yz^2)+(2x+y)^{2}sen(x^2+xy+yz^2)
f_{xy} = -cos(x^2+xy+yz^2)+(2x+y)(x+z^2)sen(x^2+xy+yz^2)
f_{xz} = 2yz(2x+y)sen(x^2+xy+yz^2) ; f_{yy}= (x+z^2)^{2}sen(x^2+xy+yz^2)
f_{yx} = f_{xy} ; f_{yz} = -2zcos(x^2+xy+yz^2)+2yz(x+z^2)sen(x^2+xy+yz^2) ;
f_{zx}=f_{xz} ; f_{zy} =f_{yz} ; f_{zz} =-2ycos(x^2+xy+yz^2)+(2yz)^{2}sen(x^2+xy+yz^2)

7) f(x,y,z) = $e^{x^2+y^2+z^3}$; f_x=2x$e^{x^2+y^2+z^3}$; f_y=2y$e^{x^2+y^2+z^3}$; f_z=3z^2$e^{x^2+y^2+z^3}$

f_{xx}=2$e^{x^2+y^2+z^3}$ +4x^2$e^{x^2+y^2+z^3}$; f_{xy}=4xy$e^{x^2+y^2+z^3}$; f_{xz}=6xz^2$e^{x^2+y^2+z^3}$
f_{yx}=f_{xy} ; f_{yy}=2$e^{x^2+y^2+z^3}$ + 4y^2$e^{x^2+y^2+z^3}$; f_{yz}= 6yz^2$e^{x^2+y^2+z^3}$
f_{zx}=f_{xz} ; f_{zy}=f_{yz} ; f_{zz} = 6z$e^{x^2+y^2+z^3}$ +9z^4$e^{x^2+y^2+z^3}$

1.13 – Máximos e mínimos para funções de duas variáveis

Uma importante aplicação do estudo de derivadas parciais, é a da otimização de funções. Otimizar uma função, significa encontrar seu desempenho máximo ou mínimo. Como para as funções de uma variável, quando as derivadas primeiras forem nulas, teremos pontos extremos que podem ser máximos ou mínimos. Para saber de que tipo são esses pontos, teremos de utilizar o determinante Hessiano calculado no ponto (x_0,y_0), que é definido a seguir.

$$H(x_0,y_0) = \left.\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Assim ,

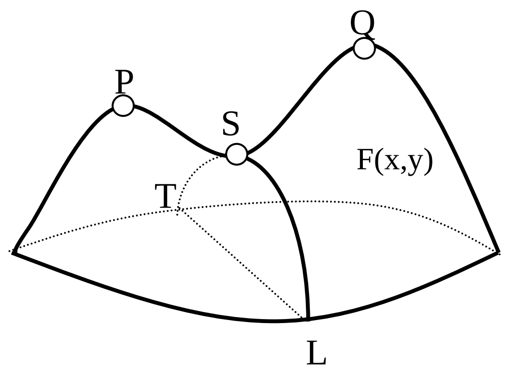
Se as derivadas f_x e f_y forem nulas, o ponto(x_0,y_0) é um extremo, e

a) $H(x_0,y_0)>0$ e $f_{xx}(x_0,y_0)+ f_{yy}(x_0,y_0) <0$ então (x_0,y_0) é um máximo.

b) $H(x_0,y_0)>0$ e $f_{xx}(x_0,y_0)+ f_{yy}(x_0,y_0) >0$ então (x_0,y_0) é um mínimo.

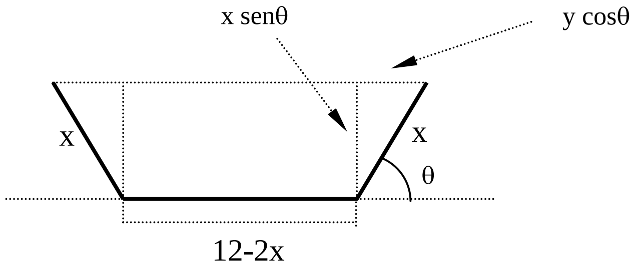
c) $H(x_0,y_0)<0$ então (x_0,y_0) é um ponto de sela.

d) $H(x_0,y_0)= 0$ o teste é inconclusivo.



Os pontos P e Q são pontos de máximo, porque qualquer deslocamento em sua vizinhança, irá descer.
O ponto S é uma sela porque nos sentidos SP e SQ sobe, mas no sentido SL ou ST desce.

Ex.1 Para o projeto de uma calha, tem-se uma folha metálica de 12cm de largura, a qual deseja-se dobrar de forma a se ter uma capacidade máxima.



A área da seção da calha é a área do retângulo, mais a área dos dois triângulos.

$A = f = (1/2).x\cos\theta.x\text{sen}\theta.\ 2 + x\ \text{sen}\theta.(12\text{-}2x)$ (a)

$f(x, \theta) = x^2 \cos\theta\text{sen}\theta + 12x\text{sen}\theta - 2x^2\text{sen}\theta$

Estudar os extremos (máximos e mínimos) da função.

$f_x = (\partial f / \partial x) = 2x\text{sen}\theta\cos\theta + 12\text{sen}\theta - 4x\text{sen}\theta = 0$

$2x\cos\theta = 4x - 12$ ou $\cos\theta = 2\text{-}6/x$

$f_\theta = (\partial f / \partial\theta) = x^2 \cos 2\theta + 12x\cos\theta - 2x^2 \cos\theta = 0$

$= x (2\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1) + 12\cos\theta$

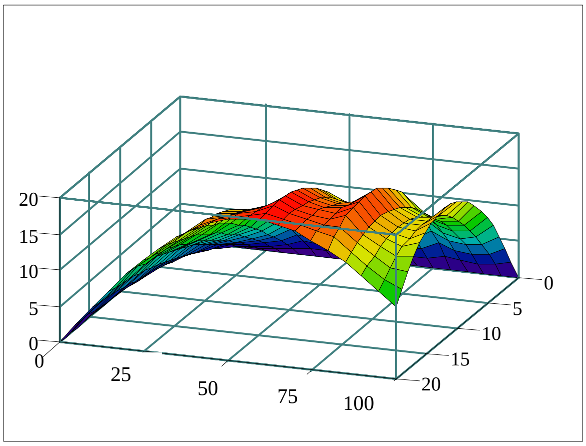
$\text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta\cos\theta$
$= 2 \cos^2\theta - 1$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$
$= 2\cos^2\theta - 1$

substituindo o valor $\cos\theta = 2 - 6/x$ na 2ª equação e resolvendo, encontra-se $x = 4$ que resulta $\cos\theta = 2\text{-}6/4 = 1/2$

$\cos\theta = ½ \rightarrow \theta = 60^o$

O resultado é tão razoável, que omitimos o teste das 2as derivadas, também pó causa do trabalho que estas dariam. Mas para ter certeza podemos calcular a área (a) para valores de x e θ abaixo e acima destes e confirmaremos se a capacidade é ou não máxima.



X, Y, Z

Ponto de máximo: (x,y) = (4, 60)

XYZ =

193	4	6	3.336
194	4	12	6.58
195	4	18	9.647
196	4	24	12.453
197	4	30	14.928
198	4	36	17.013
199	4	42	18.662
200	4	48	19.846
201	4	54	20.553
202	4	60	20.785
203	4	66	20.562
204	4	72	19.919
205	4	78	18.904
206	4	84	17.576
207	4	90	16

máximo

Ex.2 – Achar os extremos da função

$f(x,y) = \text{sen}[0{,}0225(x^2+y^2) - 0{,}45(x+y) + 4{,}5]$.

Calculando as primeiras derivadas , tem-se:

$f_x = \cos[0{,}0225(x^2+y^2) - 0{,}45(x+y)+4{,}5].(0{,}045\,x - 0{,}45) = 0$

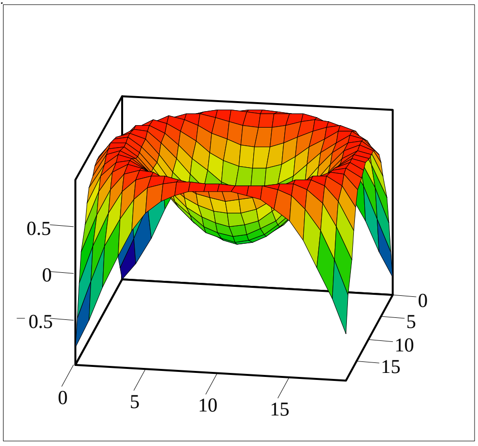
$f_y = \cos[0{,}0225(x^2+y^2) - 0{,}45(x+y)+4{,}5].(0{,}045\,y - 0{,}45) = 0$

Como o cos(...) é diferente de zero(para não dar uma solução nula) então quem deve ser zero são : $0{,}045\,x - 0{,}45 = 0$, e $0{,}045\,y - 0{,}45 = 0$, que resulta $x = 10$ e $y = 10$.
Para verificar se o ponto é de máximo ou de mínimo calcula-se as segundas derivadas.

$f_{xx} = -\,\text{sen}(...).(0{,}045.\,x - 0{,}45)^2 + \cos(\ldots).\,0{,}045$
$f_{yy} = -\,\text{sen}(...).(0{,}045.\,x - 0{,}45)^2 + \cos(\ldots).\,0{,}045$

Então, calculando-se essas derivadas no ponto x = y =10, tem-se:
$f_{xx} + f_{yy} > 0$ que corresponde a um ponto de mínimo da função.

Substituindo os valores x = y = 10 na função f(x,y) vemos que vai dar zero, e portanto a função tem um mínimo nesse ponto. Isso é confirmado pelo gráfico tridimensional da função.



Note que nos pontos x =10 e y =10, a função tem um de seus mínimos.

M

Gráfico 3D da função seno

Ex.3 – Achar os extremos da função, com os mesmos valores do exemplo 2, para uma exponencial.

$$f(x,y) = e^{-0{,}0225(x^2+y^2)+0{,}45(x+y)+4{,}5} = e^{f(x,y)}$$

$$f_x = [-0{,}045\ x + 0{,}45]\ .\ e^{0{,}0225(x^2+y^2)-0{,}45(x+y)+4{,}5}$$

$$f_y = [-0{,}045\ y + 0{,}45]\ .\ e^{0{,}0225(x^2+y^2)-0{,}45(x+y)+4{,}5}$$

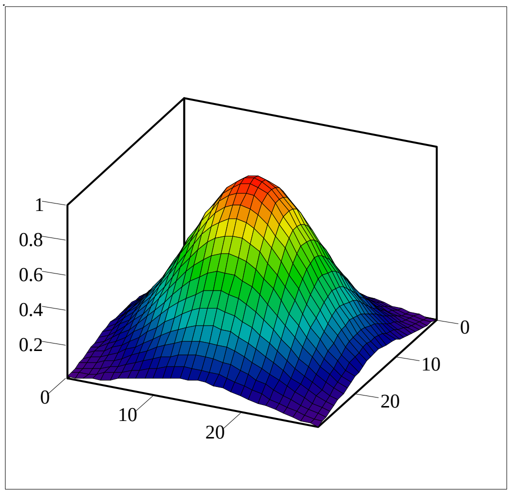
$$f_{xx} = [-0{,}045\ x + 0{,}45]^2.\ e^{f(x,y)} + 0{,}045\ .\ e^{f(x,y)}$$

$$f_{xx} = [-0{,}045\ y + 0{,}45]^2.\ e^{f(x,y)} + 0{,}045\ .\ e^{f(x,y)}$$

No ponto x=y=10, tem-se:

$f_{xx} + f_{yy} < 0$

que corresponde a um ponto de máximo, conforme pode ser verificado no gráfico da função.



M

Gráfico 3D da função exponencial

Ex.4 – A temperatura T (°C) em cada ponto de um painel plano é dada pela equação $T=16x^2 + 24x + 40y^2$. Encontre a temperatura nos pontos mais quentes e mais frios da região.

$f_x = (\partial f / \partial x) = 32x + 24$; $f_y = (\partial f / \partial y) = 80y$

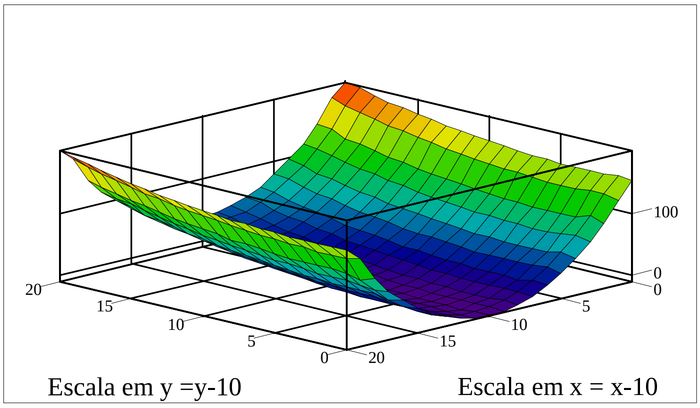
Os pontos extremos são calculados para $f_x = 0$ e $f_y = 0$, resultando

$x = -3 / 4 = -0{,}75$ e $y = 0$.

$$H(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)} = \begin{vmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 80 \end{vmatrix}_{(-3/4,\,0)} > 0$$

$H(x_0,y_0) > 0$, $f_{xx} + f_{yy} > 0$ é um ponto de mínimo.

O ponto de mínimo é $(x,y) = (-3/4 , 0)$, e em qualquer outro ponto na vizinhança dele, a temperatura já será maior, conforme mostra o gráfico da superfície.



X, Y, Z

Ponto de mínimo: (x,y) =(-0,75 , 0)

XYZ =

	0	1	2
8	-1	1.2	49.6
9	-1	1.6	94.4
10	-1	2	152
11	-0.8	-2	151.04
12	-0.8	-1.6	93.44
13	-0.8	-1.2	48.64
14	-0.8	-0.8	16.64
15	-0.8	-0.4	-2.56
16	-0.8	0	-8.96
17	-0.8	0.4	-2.56
18	-0.8	0.8	16.64
19	-0.8	1.2	48.64
20	-0.8	1.6	93.44
21	-0.8	2	151.04
22	-0.6	-2	151.36

mínimo

Ex.5 – Achar os pontos críticos da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$.

Os pontos críticos de f(x,y) , são a solução do sistema:

$f_x = 2x - 2 = 0$, ou $x=1$

$f_y = 2y = 0$, ou $y=0$, o ponto é $(x,y) = (1,0)$

Por outro lado,

$f_{xx}(1,0) = 2$, $f_{xy}(1,0) = 0$, $f_{yx}(1,0) = 0$ e $f_{yy}(1,0) = 2$

$$H(1,0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$f_{xx}(1,0) + f_{yy}(1,0) > 0$, o ponto é um mínimo de f(x,y).

1.14 – Máximos e mínimos (locais) de funções de várias variáveis

Seja f uma função de n variáveis $x_1, x_2, \ldots x_n$, diz-se que um ponto $P_0(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0})$ é um ponto de máximo local de $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, quando $f(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0}) > f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, para qualquer ponto $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ vizinho de $P_0(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0})$.

Da mesma forma, $P_0(x_{10},x_{20},...x_{n0})$ é um ponto de mínimo local de f, se $f(x_{10},x_{20},...x_{n0}) < f(x_1,x_2,...x_n)$ para qualquer ponto $P(x_1,x_2,...x_n)$ vizinho de $P_0(x_{10},x_{20},...x_{n0})$.

O ponto P_0 é encontrado, pela solução das equações:

$f_{x1} = 0$, $f_{x2} = 0$, ..., $f_{xn} = 0$ (tangentes à superfície no ponto)

O determinante Hessiano calculado no ponto P_0 , de máximo ou de mínimo, para o caso de n variáveis é dado por:

$$H(P_0) = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(P_0) & f_{x_1x_2}(P_0) & .... & f_{x_1x_n}(P_0) \\ f_{x_2x_1}(P_0) & f_{x_2x_2}(P_0) & .... & f_{x_1x_n}(P_0) \\ .... & .... & .... & .... \\ f_{x_nx_1}(P_0) & f_{x_nx_1}(P_0) & .... & f_{x_nx_n}(P_0) \end{vmatrix}$$

Além disso é necessário calcular os n determinantes

$\Delta_0 = 1$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(P_0) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(P_0) & f_{x_1x_2}(P_0) \\ f_{x_2x_1}(P_0) & f_{x_2x_2}(P_0) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(P_0) & f_{x_1x_2}(P_0) & f_{x_1x_3}(P_0) \\ f_{x_2x_1}(P_0) & f_{x_2x_2}(P_0) & f_{x_2xx_3}(P_0) \\ f_{x_3x_1}(P_0) & f_{x_3x_2}(P_0) & f_{x_3x_3}(P_0) \end{vmatrix}$$

....

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(P_0) & f_{x_1x_2}(P_0) & .... & f_{x_1x_n}(P_0) \\ f_{x_2x_1}(P_0) & f_{x_2x_2}(P_0) & .... & f_{x_1x_n}(P_0) \\ .... & .... & .... & .... \\ f_{x_nx_1}(P_0) & f_{x_nx_1}(P_0) & .... & f_{x_nx_n}(P_0) \end{vmatrix}$$

Então, se:

a) $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ forem todos positivos, P_0 é um ponto de mínimo de f .

b) $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ são alternadamente positivos e negativos, P_0 é um ponto de máximo de f.

Ex.1 – Achar os pontos críticos da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ e verificar se são de máximos ou de mínimos.

$f_x = 2x = 0 \rightarrow x = 0$
$f_y = 2y = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow P_0(0,0,0)$,que é o único ponto crítico
$f_z = 2z = 0 \rightarrow z = 0$

$f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 0$, $f_{xz} = 0$
$f_{yx} = 0$, $f_{yy} = 2$, $f_{yz} = 0$
$f_{zx} = 0$, $f_{zy} = 0$, $f_{zz} = 2$

$$H(0,0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$\Delta_0 = 1$; $\Delta_1 = |2| = 2$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$

todos positivos , logo, o ponto P_0 (0,0,0) é um ponto de mínimo de f.

Ex.2 – Estudar a função $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 4y + 2z - 5$.

Os pontos críticos da função são:

$f_x = -2x = 0 \rightarrow x = 0$
$f_y = -2y + 4 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow P_0(0,2,1)$,que é o único ponto crítico
$f_z = -2z = 2 = 0 \rightarrow z = 1$

$f_{xx} = -2$, $f_{xy} = 0$, $f_{xz} = 0$
$f_{yx} = 0$, $f_{yy} = -2$, $f_{yz} = 0$
$f_{zx} = 0$, $f_{zy} = 0$, $f_{zz} = -2$

H(0,2,1) = $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ = - 8

Δ_0=1 ; Δ_1=$|-2|$ = -2 ; Δ_2 = $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$= 4 ; Δ_3 = $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$=-8

Os sinais dos Δ(s) são alternados, logo o ponto $P_0(0,2,1)$ é um ponto de máximo da função f.

Ex.3 – Estudar os extremos da função:

$$f(x,y) = x^3 / 3 + 2y^3 / 3 - 3x^2 + 10y^2 + 8x + 42y + 2$$

$f_x = x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \rightarrow \; x_1=4$ e $x_2 = 2$
$f_y = 2y^2 - 20y + 42 = 0 \rightarrow y_1=7$ e $y_2=3$

$f_{xx} = 2x-6$, $f_{xy} = 0$,
$f_{yx} = 0$, $f_{yy} = 4y - 20$.
$\rightarrow$ existem pontos que podem ser críticos, ou seja

$P_1(4,7)$; P_2 $(4,3)$; $P_3(2,7)$ e $P_4(2,3)$

O Hessiano calculado nestes pontos é H(x,y) = $\begin{vmatrix} 2x-6 & 0 \\ 0 & 4y-20 \end{vmatrix}$

H(4,7) = $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$ >0 e Δ_0=1 ; Δ_1=$|2|$= 2 ; Δ_2 = $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$= 4 ;

O ponto é de mínimo.

H(4,3) = $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix}$ <0 (sela)

H(2,7) = $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$< 0 (sela)

H(2,3) = $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix}$>0 e Δ_0=1 ; Δ_1=$-|2|$= -2 ; Δ_2 = $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix}$= 16

O ponto é de máximo.

Exercícios propostos:

1 - Achar os extremos da função $f(x,y)=2x^2 +3y^2 - x^3 /3 – y^3/3 +1$
Resp. $P_1(0,0)$ é mínimo e $P_4(4,6)$ é máximo e
$P_2(0,6)$ e $P_3(4,0)$ são selas.

2 - Achar os extremos da função $f(x,y)=\text{sen}x + \text{sen}(y+\pi/2)$
Resp. $P_1(\pi/2,0)$ é máximo.

3- Achar os extremos da função $f(x,y)= x^3/3 + y^4/4 - 25x + 27y + 1$
Resp. $P_1(5,-3)$ é mínimo.

4- Achar os extremos da função $f(x,y)= -x^3/3 -y^3/3 -2x^2-3y^2+4x+8y+1$
Resp. $P_1(2,4)$ e $P_2(2,2)$ são de máximo.

1.15 – Operadores especiais da física

1.15.1 - Gradiente

Define-se o gradiente de uma função escalar f(x,y,z), e representa-se por grad f ou ∇f, a expressão:

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

O gradiente é um vetor e i , j , k são os vetores unitários.

1.15.2 - Divergência

Denomina-se divergência de um vetor $\vec{V} = V_x\,\hat{i} + V_y\,\hat{j} + V_z\,\hat{k}$, e representa-se por div **V** ou ∇. **V** , a expressão

$$\text{div } \mathbf{V} = \nabla.\ \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Uma aplicação de divergência é em aerodinâmica, no escoamento de um fluido, onde **V** = ρ **v** , ou seja, o produto da densidade pela velocidade então div (ρ **v**) representa o escoamento por unidade de volume num ponto do fluido.

1.15.3 - Rotacional

O rotacional do vetor **V**, representado por rot V, ou ∇×**V** é definido por

$$\text{rot } \mathbf{V} = \nabla\times\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

O rotacional em mecânica dos fluidos, mede a velocidade de rotação (Ω) do fluido ou vorticidade do fluido num ponto dado, da forma

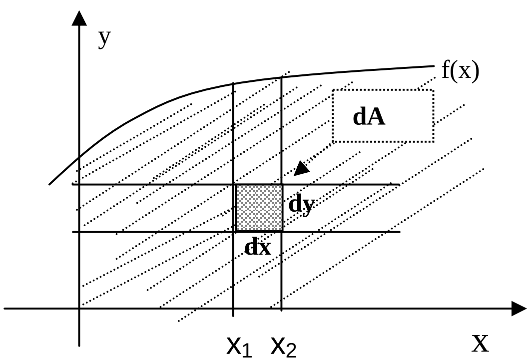
$$\Omega = (1/2).\ \text{rot}\ (\rho\ \mathbf{v})$$

1.16 – Integrais múltiplas

As integrais múltiplas podem ser definidas ou indefinidas, ou podem ser mistas. Porém, seguem as mesmas regras das integrais simples e por isso relembremos aqui as principais fórmulas de integração simples:

$\int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, onde u =f(x) e n≠ 1	$\int csu\,du = \ln\lvert cscu - cotu\rvert + C$
$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	$\int cotu\,du = \ln\lvert senu\rvert + C$
$\int e^u du = e^u + C$	$\int sec^2u\,du = tanu + C$
$\int a^u du = a^u / \ln a + C$	$\int csc^2u\,du = - cotu + C$
$\int cosu\,du = senu + C$	$\int secu\,tanu\,du = secu + C$
$\int senu\,du = -cosu + C$	$\int cscu\,cotu\,du = -cscu + C$
$\int tanu\,du = -\ln\lvert cosu\rvert + C$	$\int sen^2 u\,du = [2u - sen2u] / 4 + C$
$\int secu\,du = \ln\lvert secu + tanu\rvert + C$	$\int cos^2 u\,du = [2u + sen2u] / 4 + C$

A integral múltipla mais simples é a integral dupla para calcular a área de uma figura plana.



A área infinitesimal dA = dx. dy é obtida integrando de x_1 até x_2

$$A = \int_{x_1}^{x_2}\int_0^{f(x)} dx.dy = \int_{x_1}^{x^2} [y]_0^{f(x)}\,dx$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Ex.1 Achar a área sob a função y= -2x^2 + 18 , de x=0 até x=3.

$$A = \int_{x_1}^{x_2}\int_0^{f(x)} dx.dy = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_0^3 (-2x^2+18)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 18x \right]_0^3$$

A = - 18 + 54 = 46 (unid^2)

Outros exemplos de integrais são:

Ex. 2 Calcular a integral múltipla mista (definida e indefinida) $\int\int_x^{x^2} xydxdy$

Solução:

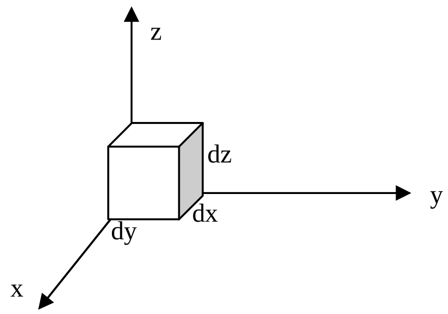
$$\int\int_x^{x^2} xydxdy = \int x.\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{x^2} dx = \int x.\left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2}\right]dx = \frac{x^6}{12} - \frac{x^4}{8} + c$$

Ex.3 Calcular a integral múltipla mista $\int\int_o^x \operatorname{sen}(x+y)dxdy$

$$\int\int_o^x \operatorname{sen}(x+y)dxdy = \int[-\cos(x+y)]_0^x dx = -\int[\cos(2x) - \cos x]dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x + c$$

As integrais múltiplas são muito usadas para calcular integrais de volume de sólidos, conforme mostra a figura



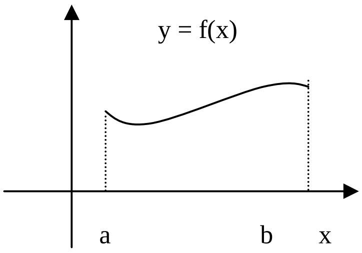
O volume do sólido pode ser calculado por uma integral tripla, do tipo:

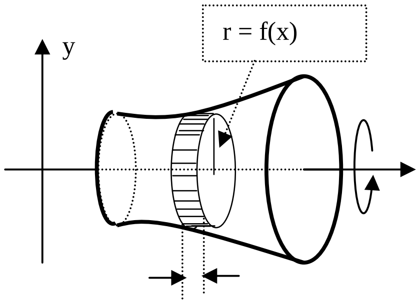
$$V = \int_0^a\int_0^b\int_0^c dxdydz$$

1.16.1- Volume de sólidos de revolução

Um sólido de revolução se forma girando uma figura plana em torno de uma reta fixa.

Girando o gráfico de uma função f(x) em tono do eixo x, tem-se:





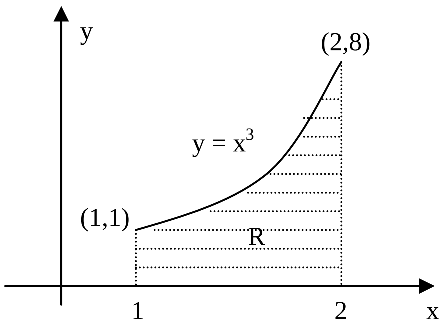
$dV = \pi r^2\, dx$

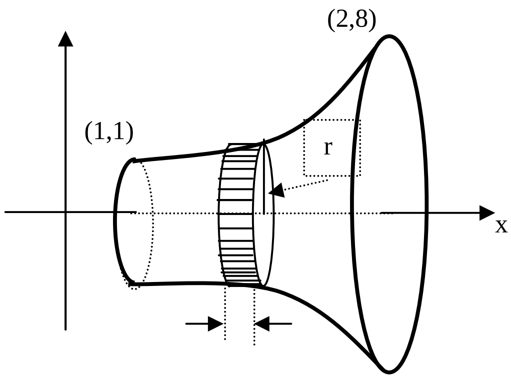
$dV = \pi[f(x)]^2\, dx$

$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$

Figura plana girando em x   Cálculo do elemento de volume

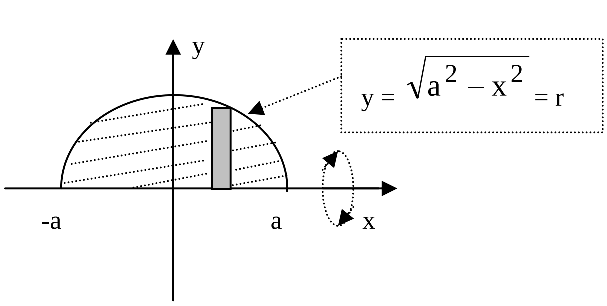
Ex1: Usando o método do disco circular, calcule o volume do sólido gerado pela revolução da região sob a função y = f(x) = x^3, no intervalo [1,2].



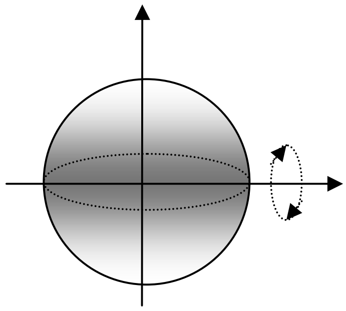


$$V = \pi \int_1^2 [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^2 [x^3]^2 dx = \pi \int_1^2 x^6 dx = \pi \left.\frac{x^7}{7}\right|_1^2 = \frac{127}{7}\pi \text{ (unid)}^3$$

Ex2: Achar o volume gerado pela função f(x) = $\sqrt{a^2 - x^2}$ em [-a, a]



Semi-círculo em rotação



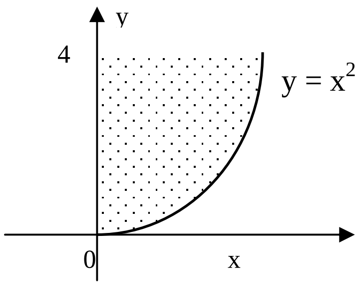
Sólido (esfera) gerado pela rotação do semi-círculo

$$V = \pi \int_{-a}^{a} [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} [\sqrt{a^2 - x^2}\,]^2 dx = \pi \int_{1}^{2} [a^2 - x^2] dx = \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]\Bigg|_{-a}^{a}$$

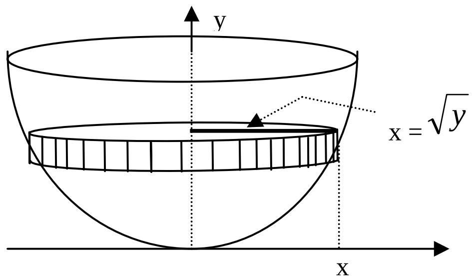
$$= \pi \left\{ \left[a^3 - \frac{a^3}{3} \right] - \left[-a^3 + \frac{a^3}{3} \right] \right\} = \pi \left\{ a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3} \right\} = \pi \left\{ 2a^3 - \frac{2a^3}{3} \right\}$$

$$= 2\pi a^3 \left\{ 1 - \frac{1}{3} \right\} = \frac{4}{3} \pi a^3$$ que é o volume da esfera gerada.

Ex3: Calcule o volume gerado pela parábola $y = x^2$ girando em torno do eixo de y, no intervalo [0,4].



Seção plana parábola girando em y



Sólido gerado pela parábola de revolução

$$V = \pi \int_{a}^{b} r^2 dy = \pi \int_{a}^{b} [g(y)]^2 dy = \pi \int_{0}^{4} [\sqrt{y}\,]^2 dy = \pi \int_{0}^{4} y\,dy = \frac{\pi y^2}{2}\Bigg|_{0}^{4} = 8\pi = 25{,}13 \text{ unid}^3.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Calcule o gradiente da função $\Phi(x,y,z)= x^2+2xy+z^3$

Resp. $\text{grad}\Phi = (2x+2y)\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 3z^2\,\mathbf{k}$

2) Dada a função vetorial $\mathbf{V} = 2x^3\,\mathbf{i}+3xyz^2\,\mathbf{j}+4(x^2+y^3)\,\mathbf{k}$, calcule a sua divergência.

Resp. $\text{div}\,\mathbf{V} = 6x^2 + 3xz^2$

3) Calcule o rotacional do vetor $\mathbf{V} = x^2\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + 5yz^2\,\mathbf{k}$

Resp. $\text{rot}\,\mathbf{V} = 5z^2\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{k}$

4) Calcular a integral $\int\int_0^x (x+y)dxdy$ Resp. $x^3 / 2 = C$

5) $\int_0^a\int_0^b xydxdy$ Resp. $a^2b^2 / 4$

6) Integrar as expressões do centróide de uma figura plana, transformando integral dupla em integral simples. As expressões em integral dupla são: $x_c = (1/A)\int_{x_1}^{x_2}\int_{g(x)}^{f(x)} x\,dxdy$ e $y_c = (1/A)\int_{x_1}^{x_2}\int_{g(x)}^{f(x)} y\,dxdy$

Resp. $x_c = (1/A).\int_{x_1}^{x_2}[f(x)-g(x)]x.dx$ e $y_c = (1/2A).\int_{x_1}^{x_2}[f^2(x)-g^2(x)]dx$

7) Calcular o volume gerado pela hipérbole $y = 1/x$, girando em x e de 0,5 até 3

Resp . $V = \pi\int_{0,5}^{3}[f(x)]^2dx = \pi\int_{0,5}^{3}[\frac{1}{x}]^2dx = 8{,}34$ unid^3