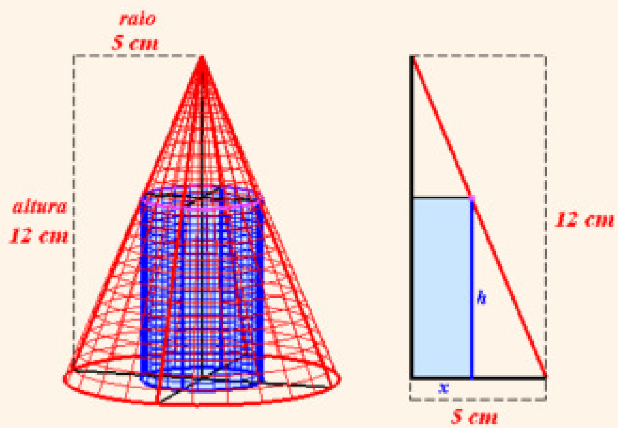
1. Encontre as dimensões de um cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito em um cone circular reto com raio de 5 cm e altura de 12 cm .



Por semelhança de triângulos:

$$\frac{12}{h} = \frac{5}{5-x} \to$$
$$\to 60 - 12x = 5h \to$$
$$\to h = \frac{60-12x}{5}$$

Volume do cilindro:

$$V = \pi r^2 h =$$
$$= \pi x^2 \frac{60-12x}{5} =$$
$$= \frac{12\pi}{5}\left(5x^2 - x^3\right)$$

Variação de x:

$$\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{matrix}\right\} \to 0 \leq x \leq 5$$

$$\boxed{x \;\Big|\; \begin{matrix}\max \\ \text{abs}\end{matrix}\; V(x) = \frac{12\pi}{5}\left(5x^2 - x^3\right),\ x \in [0,5]}$$

$$V(x) = \frac{12\pi}{5}\left(5x^2 - x^3\right) \to V'(x) = \frac{12\pi}{5}\left(10x - 3x^2\right) = \frac{12\pi}{5}x\,(10-3x)\text{, logo:}$$

$$V'(x) = \frac{12\pi}{5}x\,(10-3x) = 0 \to x = 0 \text{ ou } 10 - 3x = 0 \to x = 0 \text{ ou } x = \frac{10}{3} \to$$

$$\xrightarrow{\text{Interior do Intervalo } [0,5]:\ \{x \mid x \in (0,5)\}} x = \frac{10}{3} \begin{cases} \text{nº crítico no interior} \\ \text{do intervalo } [0,5] \end{cases}$$

A função V é contínua em $[0,5]$.

- Nos números críticos no interior do Intervalo:

$$V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{12\pi}{5}\left(5\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^3\right) = \frac{12\pi}{5}\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^2\left(5 - \frac{10}{3}\right) =$$
$$= \frac{400\pi}{9} \text{ max. abs.}$$

- Nas extremidades do Intervalo:

$$V(0) = \frac{12\pi}{5}\left(5\cdot 0^2 - 0^3\right) = 0$$
$$V(5) = \frac{12\pi}{5}\left(5\cdot 5^2 - 5\cdot 5^3\right) = 0$$

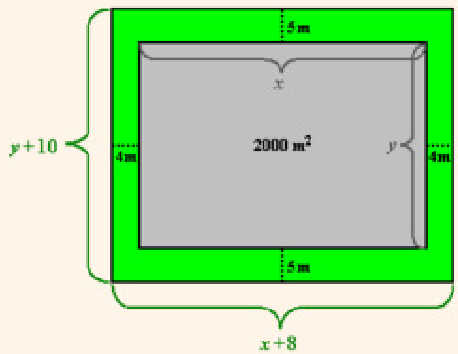
$$h = \frac{60-12x}{5} \xrightarrow{x = \frac{10}{3}}$$
$$\to h = \frac{60 - 12\left(\frac{10}{3}\right)}{5} \to$$
$$\to h = 4$$

Resposta: As dimensões do cilindro de maior volume são:

raio : $\frac{10}{3}$ cm

altura : 4 cm

2º Um edifício de 2000 m^2 de piso deve ser construído , sendo exigido recuos de 5 m na frente e nos fundos e de 4 m nas laterais . Ache as dimensões do lote com menor área onde esse edifício possa ser construído.



Área do edifício: $xy = 2000$

$xy = 2000 \to y = \dfrac{2000}{x}$, $x \in (0,+\infty)$

Área do terreno:

$A = (x+8)(y+10) \xrightarrow{y=\frac{2000}{x}}$

$\to A = (x+8)\left(\dfrac{2000}{x}+10\right) \to$

$\to A = 2000 + 10x + \dfrac{16000}{x} + 80 \to$

$\to A = 2080 + 10x + \dfrac{16000}{x}$, $x \in (0,+\infty)$

$$\boxed{x \;\Big|\; \begin{matrix}\min\\ \text{abs}\end{matrix}\; A(x) = 2080 + 10x + \frac{16000}{x} \;,\; x \in (0,+\infty)}$$

$A(x) = 2080 + 10x + \dfrac{16000}{x} \to A'(x) = 10 - \dfrac{16000}{x^2}$, logo:

$A'(x) = 10\left(\dfrac{x^2-1600}{x^2}\right) = 0 \to x^2 - 1600 = 0 \to x^2 = 1600 \xrightarrow{x \in (0,+\infty)} x = \underbrace{40}_{\text{nº crítico}}$

A função A é contínua em $(0,+\infty)$.

- Nos números críticos no interior do Intervalo:

$A(40) = 2080 + 10\cdot 40 + \dfrac{16000}{40}$ min. abs.

- Nas extremidades do Intervalo:

$\lim\limits_{x\to 0^+} A(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(2080 + 10x + \dfrac{16000}{x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} A(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(2080 + 10x + \dfrac{16000}{x}\right) = +\infty$

$y = \dfrac{2000}{x} \xrightarrow{\text{quando } x = 40\text{ m}}$

$\to y = \dfrac{2000}{40} = 50\,\text{m}$

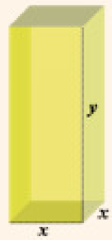
Para o lote de menor área:

dimensões do edifício: $40\text{m} \times 50\text{m}$

dimensões do lote: $48\text{m} \times 60\text{m}$

Resposta: O lote de menor área para construir esse edifício deve ter frente e fundo de **48m** e laterais de **60m**.

3º Uma caixa fechada com base quadrada vai ter um volume de 2000 cm^3. O material da tampa e da base vai custar R$ 3,00 por centímetro quadrado e o material para os lados R$ 1,50 por centímetro quadrado. Encontre as dimensões da caixa de modo que o custo seja mínimo.



Volume da Caixa: $2000 = x^2 y$

$$2000 = x^2 y \rightarrow y = \frac{2000}{x^2}\ ,\ x \in (0,+\infty)$$

Área da Base e da Tampa da caixa: x^2

Custo da Base e da Tampa da caixa: $3x^2$

Área de cada Lado da caixa: xy

Custo de cada Lado da caixa: $1{,}5\,xy$

Custo da Caixa:

$$C = 2\cdot 3x^2 + 4\cdot 1{,}5\,xy \xrightarrow{y = \frac{2000}{x^2}} C = 6x^2 + 6x\cdot\frac{2000}{x^2} \rightarrow C = 6\left(x^2 + \frac{2000}{x}\right)$$

$$\boxed{x \;\Big|\; \begin{matrix}\textbf{min}\\ \textbf{abs}\end{matrix}\ \mathbf{C(x) = 6\left(x^2 + \frac{2000}{x}\right),\ x \in (0,+\infty)}} \qquad \Uparrow$$

$$C(x) = 6\left(x^2 + \frac{2000}{x}\right) \rightarrow C'(x) = 6\left(2x - \frac{2000}{x^2}\right) \rightarrow C'(x) = 12\left(\frac{x^3 - 1000}{x^2}\right),\ \text{logo:}$$

$$C'(x) = 12\left(\frac{x^3 - 1000}{x^2}\right) = 0 \rightarrow x^3 - 1000 = 0 \rightarrow x^3 = 1000 \rightarrow x = \underbrace{10}_{n^{\underline{o}}\ \text{crítico}}$$

A função C é contínua em $(0,+\infty)$.

- Nos números críticos no interior do Intervalo:

$$C(10) = 6\left(10^2 + \frac{2000}{10}\right)\ \ \textbf{min. abs.}$$

- Nas extremidades do Intervalo:

$$\lim_{x\to 0^+} C(x) = \lim_{x\to 0^+} 6\left(x^2 + \frac{2000}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} C(x) = \lim_{x\to +\infty} 6\left(x^2 + \frac{2000}{x}\right) = +\infty$$

$$y = \frac{2000}{x^2} \xrightarrow{\text{quando } x = 10\text{ cm}}$$

$$\rightarrow y = \frac{2000}{10^2} = 20\,\text{cm}$$

Resposta: As dimensões da caixa de menor custo são **10cm × 10cm × 20cm**.

DEFINIÇÃO

> Se f for uma função dada pela equação
>
> $$s = f(t)$$
>
> e uma partícula se mover ao longo de uma reta de tal forma que s seja o número de unidades da distância orientada da partícula a um ponto fixo na reta em t unidades de tempo, então a **velocidade instantânea** da partícula em t unidades de tempo será v unidades de velocidade, onde
>
> $$v = f'(t) \Leftrightarrow v = \frac{ds}{dt}$$
>
> se a derivada existir.

EXEMPLO 1 Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação

$$s = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1$$

Determine os intervalos de tempo nos quais a partícula se move para a direita e para a esquerda. Determine também o instante no qual ela inverte o seu sentido.

Solução

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ &= 6t^2 - 8t + 2 \\ &= 2(3t^2 - 4t + 1) \\ &= 2(3t - 1)(t - 1) \end{aligned}$$

A velocidade instantânea é zero quando $t = \frac{1}{3}$ e $t = 1$. Logo, nesses dois instantes a partícula está em repouso. A partícula move-se para a direita quando v é positivo e move-se para a esquerda quando v é negativo. Determinamos o sinal de v para os vários intervalos de t e os resultados estão dados na Tabela 1.

Tabela 1

	$3t - 1$	$t - 1$	*Conclusão*
$t < \frac{1}{3}$	$-$	$-$	v é positivo, e a partícula move-se para a direita
$t = \frac{1}{3}$	0	$-$	v é zero e a partícula está mudando de sentido da direita para a esquerda
$\frac{1}{3} < t < 1$	$+$	$-$	v é negativo e a partícula move-se para a esquerda
$t = 1$	$+$	0	v é zero e a partícula está mudando de sentido, da esquerda para a direita
$1 < t$	$+$	$+$	v é positivo e a partícula move-se para a direita